

## TD de mathématiques n°12 : Calcul matriciel

### Pour commencer

#### *Opérations matricielles*

**Exercice 1** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer, si possible,  $A + B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $AC$ ,  $BC$  et  $ABC$ .

**Exercice 2** On considère les matrices  $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $LC$ ,  $CL$ ,  $LCL$  et  $CLC$ .

**Exercice 3** Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Exprimer  $A$  comme une combinaison linéaire de  $I$  et  $J$ .

**Exercice 4** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Résoudre l'équation  $AX = XA$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 5** Déterminer toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent à  $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 6** Combien existe-t-il de matrices diagonales  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $D^2 - D - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ?

**Exercice 7** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est antisymétrique si  ${}^t A = -A$ .

- (a) Donner un exemple de matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non nulle et antisymétrique.
- (b) Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à la fois symétrique et antisymétrique est nulle.
- (c) Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à la fois diagonale et antisymétrique est nulle.
- (d) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer qu'il existe un unique couple de matrices  $(S, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$  telles que  $\begin{cases} {}^t S = S \\ {}^t A = -A \\ M = S + A \end{cases}$

Déterminer les matrices  $S$  et  $A$  lorsque  $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 8** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}.$$

- (a) Calculer  $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ .
- (b) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n$ . Montrer que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .
- (c) En déduire que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , pour tout  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , si  $P$  est inversible alors :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(P^{-1}AP).$$

- (d) Existe-t-il une matrice  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible telle que  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$  ?

## Puissances de matrices

**Exercice 9** Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  dans les cas suivants :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(e) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra commencer par calculer  $A^2, A^3, A^4, \dots$  jusqu'à être en mesure de conjecturer un résultat que l'on prouvera ensuite par récurrence.

**Exercice 10** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 11** Soient  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $A = I_2 + B$ .

Déterminer  $B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , puis en déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 12** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

(a) Déterminer  $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = (a - b)I_2 + bJ$ .

(b) Déterminer  $J^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et en déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13** On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

(a) Déterminer  $P, Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $\begin{cases} P + Q = I_2 \\ P + \frac{1}{3}Q = M \end{cases}$

(b) Calculer  $P^2, PQ, QP$  et  $Q^2$ .

(c) En déduire  $P^k$  et  $Q^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(d) En déduire l'expression explicite de  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 14** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

(a) Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ , puis calculer  $PDP^{-1}$ .

(b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

(c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-\frac{1}{2})^n & 1 - (-\frac{1}{2})^n \\ 2 + (-\frac{1}{2})^{n-1} & 1 - (-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}$ .

**Exercice 15** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(a) Déterminer  $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = -I_3 + J$ .

(b) Déterminer  $J^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(c) À l'aide de la formule du binôme, en déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 16** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $A^2$  et en déduire  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

(b) On pose  $B = I_3 + A$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B^n = I_3 + \frac{5^n - 1}{4}A$ .

**Exercice 17** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = aA + bI_3$ .
- (b) Calculer alors  $A^3, A^4$  et  $A^5$  en fonction de  $A$  et  $I_3$ .
- (c) En déduire une conjecture donnant l'expression de  $A^n$  en fonction de  $A$  et  $I_3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  puis démontrer cette conjecture par récurrence.

**Exercice 18** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ , puis exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$  et  $A^2$ .
- (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = a_n A + b_n A^2$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont les suites réelles définies par  $a_1 = 1, b_1 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = 2b_n$  et  $b_{n+1} = a_n + b_n$ .
- (c) Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et en déduire  $b_n$ , puis  $a_n$  en fonction de  $n$ . Déterminer alors  $A^n$  explicitement en fonction de  $n$ .

### Matrices inversibles

**Exercice 19** Calculer, si possible, les inverses des matrices :

$$\begin{array}{llll} (a) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (c) \ E = \begin{pmatrix} 2 & \ln 4 \\ 1 & \ln 2 \end{pmatrix} & (e) \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & (g) \ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ (b) \ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (d) \ G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & (f) \ D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{12} \end{pmatrix} & (h) \ H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 20** Les matrices suivantes sont-elles inversibles? Si oui, déterminer leur inverse :

$$\begin{array}{lll} (a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (c) \ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (e) \ D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ (b) \ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & (d) \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & (f) \ F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 21** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = aA + bI_3$ . En déduire que la matrice  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 22** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ , puis exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$  et  $A^2$ .
- (b) En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 23** Pour quelle(s) valeur(s) de  $m \in \mathbb{R}$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle inversible?

Lorsque  $A$  est inversible, calculer  $A^{-1}$ .

## Pour continuer

---

### *Opérations matricielles*

**Exercice 24** Soient  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A + B$ ,  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $AB$  et  $BA$ . En déduire  $(A + B)^2$  de deux manières différentes.

**Exercice 25** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A + B$ ,  $A - 2B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$  et  $B^2$ .

**Exercice 26** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Calculer tous les produits possibles avec les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

**Exercice 27** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer toutes les matrices  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ .

**Exercice 28** Déterminer toutes les matrices  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent à  $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

### *Puissances de matrices*

**Exercice 29** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 30** Soit  $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . On souhaite déterminer les puissances de  $M$ .

(a) Trouver  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $M = \lambda I_2 + A$  et  $a = 1$ .

(b) Déterminer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(c) En déduire  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 31** On souhaite calculer les puissances de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(a) Écrire  $A$  sous la forme  $I_3 + N$  avec une matrice  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  bien choisie.

(b) Déterminer  $N^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . À l'aide de la formule du binôme, en déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 32** Soit  $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(a) Déterminer  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M = -I_3 + N$ .

(b) Déterminer  $N^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

(c) En déduire  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 33** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Déterminer  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- (b) Déterminer  $B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- (c) En déduire  $C^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (on pourra distinguer des cas).

**Exercice 34** Soit  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $6A^3 = 11A^2 - 5A$ .
- (b) En déduire qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = a_n A^2 + b_n A$  et exprimer  $a_{n+1}$ , puis  $b_{n+1}$ , en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .
- (c) En déduire une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , puis une expression explicite de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
- (d) En déduire l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

### Matrices inversibles

**Exercice 35** Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 36** Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leur inverse :

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 37** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^2$  et en déduire que  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 38** Pour quelle(s) valeur(s) de  $a \in \mathbb{R}$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a-1 \\ 1-a & a-1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$  est-elle inversible?

Lorsque  $A$  est inversible, calculer  $A^{-1}$ .

**Exercice 39** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice  $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que:  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$ .
- (b) Déterminer l'ensemble:  $E = \{a \in \mathbb{R}, M(a) \text{ est inversible}\}$ .
- (c) Pour tout  $a \in E$ , déterminer explicitement  $M(a)^{-1}$ .