

## Programme de colle n° 14 : Calcul matriciel.

Semaine du lundi 12 janvier.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

### Espaces probabilisés finis

14.1 Se reporter au programme précédent

### Matrices et opérations

14.2 Notion de matrice réelle, notation  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , coefficients d'une matrice. Matrice nulle de taille  $(n,p)$ . Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et les mêmes coefficients.

14.3 Notion de matrice carrée de taille  $n$ , notation  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Matrice identité de taille  $n$ . Coefficients diagonaux d'une matrice carrée. Matrice ligne de taille  $n$ , matrice colonne de taille  $n$ .  $k$ -ième ligne (ou colonne) d'une matrice donnée.

14.4 Somme de matrices. Propriétés : associativité, commutativité, neutralité de la matrice nulle. Matrice opposée d'une matrice  $A$ , notation  $A - B$ .

14.5 Produit d'une matrice par un réel. Propriétés : compatibilité avec le produit des réels, produit d'une matrice par 1 ou  $-1$ , distributivités de  $\cdot$  sur la somme de matrices et sur la somme de réels.

14.6 Produit matriciel : définition et exemples. Cas particulier du produit d'une matrice ligne par une matrice colonne. Propriétés : associativité, compatibilité avec le produit par un réel, distributivité du produit matriciel sur la somme de matrices. Produit par une matrice identité, par une matrice nulle.

14.7 La règle du produit nul est fautive pour le produit matriciel. On ne peut pas a priori simplifier une matrice dans une égalité de produit. Exemples.

14.8 Transposée d'une matrice : définition et propriétés usuelles  ${}^t({}^tA) = A$ , compatibilité avec le produit par un réel,  ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ .

### Matrices carrées

14.9 Remarque fondamentale : si  $A$  et  $B$  sont carrées de taille  $n$ , alors  $A + B$  et  $AB$  le sont aussi.

14.10 Puissances d'une matrice carrée. Formule  $A^{k+l} = A^k A^l$ . Transposition et puissances.

14.11 Matrices carrées qui commutent, exemple. Ensemble des matrices qui commutent avec  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\lambda I_n$  commute avec toute matrice carrée de taille  $n$ . Si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $A^k$  et  $B^l$  commutent pour tous entiers naturels  $k$  et  $l$ .

14.12 Identités vraies en présence de deux matrices qui commutent : si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $(AB)^n = A^n B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les identités remarquables usuelles du second degré sont valables, et la formule du binôme de Newton est valable.

14.13 Calcul des puissances de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  à l'aide de la formule du binôme de Newton.

14.14 Matrices triangulaires et diagonales : définition, notations  $\mathcal{T}_n^{\text{inf}}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_n^{\text{sup}}(\mathbb{R})$ . La somme et le produit de deux matrices triangulaires inférieures sont triangulaires inférieures (idem pour triangulaires supérieures et diagonales). Propriété similaire pour la puissance. La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est triangulaire supérieure (idem pour supérieure et inférieure).

14.15 Matrices symétriques et antisymétriques : définition et notation  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Toute matrice antisymétrique a ses coefficients diagonaux nuls.

Notation  $[A]_{i,j}$  pour le coefficient d'indice  $(i,j)$  de  $A$

## Python

**14.16** Se reporter au programme précédent

**14.17** Algorithmes glouton : principe général sur des problèmes de choix successifs, problème du rendu de monnaie, système monétaire canonique ou non.

### Quelques questions de cours

**Tous les élèves commenceront leur colle par la première question de cours, avant une seconde question de cours.**

1. Définir l'opération matricielle suivante (au choix de l'interrogation) et effectuer le calcul matriciel suivant (au choix de l'interrogation, sans variables, sur des matrices de taille raisonnable.)
2. Énoncer les propriétés du produit matriciel. Démontrer la distributivité du produit matriciel sur la somme matricielle (propr. 23 (iii)).
3. Énoncer les propriétés de la transposition. Démontrer la règle portant sur le produit matriciel.
4. Montrer que pour toute matrice carrée  $A$  et pour tous entiers naturels  $k$  et  $n$  :  $A^k A^n = A^{k+n}$ .
5. Définir : "les matrices  $A$  et  $B$  commutent", en contextualisant. Montrer que si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $A^k$  et  $B^l$  commutent pour tous entiers naturels  $k$  et  $l$ .
6. Énoncer les identités remarquables vraies en présence de matrices qui commutent (prop. 37). Démontrer que si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $(AB)^n = A^n B^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
7. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = A - I_3$ . Calculer  $B^k$  pour tout entier naturel  $k$ . En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton,  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
8. Définir la notion de matrice triangulaire supérieure. Énoncer les propositions liant les notions de matrices triangulaires supérieures, inférieures ou diagonales aux opérations de somme, de produit, de transposition et de mise à la puissance. Montrer qu'un produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.