TD de mathématiques n°13 : Fonctions continues sur un intervalle

Pour commencer

Valeurs intermédiaires, théorème de la bijection

Exercice 1 Montrer que l'équation $e^x - \ln x = 3$ possède une solution dans l'intervalle $[1, e]$.

Exercice 2 Montrer que l'équation $(\ln x)e^x = 3$ possède une solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

Exercice 3 Montrer que l'équation $\ln(1+2x) = x$ possède une solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 4 Montrer que l'équation $x^5 + x - 3 = 0$ possède une unique solution réelle.

Exercice 5 Montrer que l'équation $x^x = 1$ possède une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on déterminera.

Exercice 6 Montrer que l'équation $\ln(1+|x|) = \frac{1}{x-1}$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $\alpha \in]1, 2[$.

Exercice 7 On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 5$. Déterminer $P(\mathbb{R})$.

Exercice 8 On considère le polynôme $P(x) = -3x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 12$. Déterminer, en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $P(x) = m$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2 + x - 2\right| + |x+1|$. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer, en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\ln x = x^n$.

Exercice 11 Soit $\alpha \in]1, +\infty[$ et $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha - \ln(1+x)$.

(a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution $b \in \mathbb{R}_+^*$ et que $f(b) < 0$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $a \in \mathbb{R}_+^*$ et que $a > b$.

Exercice 12 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue.

Montrer que f possède un point fixe dans l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Études de suites implicites

Exercice 13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = x + \ln x - n$$

(a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) En comparant $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$, déterminer le sens de variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Exercice 14 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

(a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

(c) Déterminer le sens de variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \ln n$ et en déduire que $e^{x_n} \geq n - \ln n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 15 Pour tout $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,1]$ par

$$f_n(x) = x^n - nx + 1$$

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in [0,1]$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} nx_n$ et interpréter le résultat.

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = x^{2n+1} - x^{n+1} - 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$et vérifier que $x_n > 1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire le sens de variations de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Exercices de synthèse

Exercice 17 Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par la formule :

$$f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right).$$

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

(c) Calculer les limites de la fonction f aux extrémités de son domaine de définition.

(d) En déduire que f réalise une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

(e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans D_f.

(f) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(x) = x + \ln\left(1 - e^{-2x}\right)$.

(g) Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

(h) Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

(i) Proposer un tracé le plus soigné possible et tenant compte de toutes les informations précédentes de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 18 Pour tout entier naturel n non nul, on note $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x - n\ln x$.

(a) (i) Soit $n \geq 1$. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) En déduire très soigneusement que pour tout $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+^*$, notées u_n et v_n et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

(b) (i) Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a l'encadrement $1 < u_n < e$.

(ii) Montrer que pour tout $n \geq 3, f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

(iii) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge.

(iv) Donner un encadrement de $\ln(u_n)$ et en déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Pour continuer

Valeurs intermédiaires, théorème de la bijection

Exercice 19 Montrer que l'équation $\ln x + x = 2$ possède une solution dans l'intervalle [1,2].

Exercice 20 Montrer que l'équation $\ln x = -x$ possède une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier que $\alpha \in]\frac{1}{e}, 1[$ puis représenter graphiquement cette solution.

Exercice 21 On considère le polynôme $P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 66x^2 + 144x - 5$. Déterminer $P(\mathbb{R})$.

Exercice 22 On considère le polynôme $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 12x - 2$. Déterminer, en fonction de la valeur de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $P(x) = m$.

Exercice 23 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right| - |x - 1|$. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer, en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 24 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x^2 + x - 2\right| - |x - 1|$. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer, en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n - n \ln x = 2$ possède exactement deux solutions, l'une dans l'intervalle $]0, 1[$ et l'autre dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

Exercice 26 Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ possède une solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(b) Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ possède une solution dans l'intervalle $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 27 Montrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, donner un exemple de polynôme de degré $2p$ qui ne possède aucune racine réelle.

Études de suites implicites

Exercice 28 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 29 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f_n(x) = x^3 - 3nx + 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $x_n \in [0, 1]$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Exercices de synthèse

Exercice 30 Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par la formule $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en zéro.

Dans toute la suite de l'exercice, la lettre f désignera la fonction prolongée.

Donner la valeur de $f(0)$.

(c) Déterminer le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$.

(d) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(e) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

(f) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(g) Montrer que f réalise une bijection de son domaine sur un intervalle I à déterminer.

(h) Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

Exercice 31 On considère la fonction $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [1,2]$ par $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$.
On considère également la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) (i) Étudier les variations de f sur $[1,2]$.

(ii) Montrer que pour tout $x \in [1,2], f(x) = x \Longleftrightarrow x^2 - 2 - \ln x = 0$.

(iii) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [1,2]$.

(iv) Déterminer le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur $[1,2]$.

(v) Montrer enfin que pour tout $x \in [1,\alpha], f(x) \in [1,\alpha]$.

(b) (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [1,\alpha]$.

(ii) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.