Programme de colle n^o 16 : Fonctions continues sur un intervalle.

*Semaine du lundi **26 janvier**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Calcul matriciel

16.1 Chapitre complet : se reporter au programme de colle précédent.

Continuité des fonctions réelles

16.2 Rappels : fonctions continues en un point. Fonctions continues sur une partie de $\mathbb{R}$. Si deux fonctions coïncident sur un intervalle ouvert, alors l'une est continue sur cet intervalle ssi l'autre l'est.

16.3 Continuité et opérations : somme, produit, quotient de fonctions continues en un point ou sur une partie, multiplication par un réel. Composition de fonctions continues. Si f et g sont continues sur leur domaine de définition, alors $g \circ f$, $g+f$, gf et $\dfrac{g}{f}$ sont continues sur leur domaine de définition.

Le théorème des valeurs intermédiaires

16.4 Le théorème des valeurs intermédiaire. Version "changement de signe". Forme équivalente : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Exemple d'application "en l'infini" en se ramenant à l'application rigoureuse du TVI (exemple 21).

On admet qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi : $\forall (a,b) \in I^2, \forall c \in [a,b], c \in I$.

16.5 Démonstration du TVI par la méthode de dichotomie. Rappel du script Python.

16.6 Borne inférieure et borne supérieure d'une fonction réelle sur un intervalle (HP). Si une fonction f admet un minimum sur I, alors $\inf\limits_I(f) = \min\limits_I(f)$ (idem pour un maximum). Version plus générale HP du TVI faisant intervenir bornes inférieures et supérieures. Manipulation de ces notions à la lecture d'un tableau de variation (exemple).

$\inf\limits_I(f)$ est défini comme le plus grand minorant de f si celle-ci est minorée (existence admise), et $-\infty$ sinon.

16.7 Fonctions continues sur un segment : toute fonction continue sur un segment admet un minimum et un maximum sur ce segment (admis). Contre-exemples en l'absence de l'une de ces hypothèse. Théorème des bornes atteintes : l'image par une fonction continue f d'un segment $[a,b]$ est $[\min\limits_{[a,b]}(f), \max\limits_{[a,b]}(f)]$. Cas d'une fonction monotone.

Le théorème de la bijection monotone.

16.8 Le théorème de la bijection monotone. Proposition annexe (35) donnant les bornes de $f(I)$, où f est une fonction continue strictement monotone sur l'intervalle I. Utilisation pratique de ces énoncés. Application à la recherche de points fixes (exemple 37). Exemples de questions pouvant porter sur la réciproque d'une fonction continue strictement croissante (exemple 38 : monotonie, limites, étude d'une limite faisant intervenir h^{-1} en passant par le calcul d'une limite de h). Graphe de la réciproque.

Python

16.9 Début du TP sur les matrices : définition de matrices (type `array` de `Numpy`). Accès à la taille, aux coefficients, aux lignes et aux colonnes. Matrices et opérateurs booléens, égalité de matrices.

Quelques questions de cours

1. Matrices : voir le programme de la semaine dernière.
2. Montrer que si deux fonctions coïncident sur un intervalle ouvert I, alors l'une est continue sur I si et seulement si l'autre l'est (démonstration en fin de chapitre 10). Donner un contre exemple montrant que le résultat est faux dans le cas où l'intervalle I n'est pas ouvert.
3. Montrer que si f et g sont continues sur leur domaine de définition, alors $g \circ f$ l'est aussi.
4. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Donner un code Python permettant d'implémenter l'algorithme de recherche par dichotomie pour déterminer une approximation, à précision donnée en entrée, d'un antécédent d'un réel satisfaisant les hypothèses du théorème.
5. Montrer, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, que l'ensemble image d'un intervalle par une fonction continue

est un intervalle. On commencera par rappeler la caractérisation admise des intervalles ("ce sont les parties convexes de $\mathbb{R}$").

6. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que $\mathbb{R}_+ \subset f(\mathbb{R}_+)$.
7. Définir les notions de bornes inférieure et supérieures d'une fonction réelle, sur un intervalle. Montrer que si f admet un minimum sur I, alors $\min\limits_I(f) = \inf\limits_I(f)$.
8. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.
9. Énoncer le théorème de la bijection monotone et la proposition 35. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle à préciser.
10. Écrire une fonction Python prenant en entrée deux matrices (représentées comme des variables de type `numpy.ndarray`) et renvoyant `True` si celles-ci sont égales, et `False` sinon.