Correction du DM n°2

Exercice 1

1. (a) Tout d'abord, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est bien définie car pour tout réel $x > 0$, on a $1 + x > 0$ donc $\sqrt{1+x}$ est bien défini, et strictement positif.

   f est alors la composée sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto 1 + t$ par $t \mapsto \sqrt{t}$. Ces fonctions sont strictement croissantes sur leur domaine de définition.

   Par composition, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

   Calculons les limites. $t + 1 \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ donc par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 1 et par composition :

   $\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \sqrt{1} = 1.}$

   De plus, $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $t + 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc par composition :

   $\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.}$

   On peut, avec toutes ces informations, tracer le tableau de variation de f.

   (b) Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{x+1} = x \\ &\overset{(1)}{\iff} x + 1 = x^2 \\ &\iff x^2 - x - 1 = 0 \\ &\overset{(2)}{\iff} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &\overset{(3)}{\iff} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

   (1) : par croissante stricte de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et car $x \geq 1$ donc $(\sqrt{x+1}, x) \in (\mathbb{R}_+)^2$.
   (2) : Il faut calculer le discriminant et argumenter sur la copie.
   (3) : $x \geq 1$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $x \neq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Enfin, on a bien $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 1$ (car $\sqrt{5} > 1$) donc :

   $\boxed{\text{L'unique réel } \alpha \geq 1 \text{ tel que } f(\alpha) = \alpha \text{ est } \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

   (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} g(x) > 0 &\iff f(x) > x \\ &\iff x + 1 > x^2 \text{ (par croissance stricte de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff x^2 - x - 1 < 0 \end{aligned}$$

   D'après l'étude de polynôme faite à la question précédente, les racines de $X^2 - X - 1$ sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et α donc ce polynôme du second degré à coefficient dominant positif est strictement négatif sur $]\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \alpha[$, et positif en dehors.
   Ici, $x > 0$ donc $x^2 - x - 1 < 0 \iff x \in]0, \alpha[$. Enfin, $g(x) = 0 \iff f(x) = x \iff x = \alpha$.

   Le tableau de signe de g est donc le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	-	

2. (a) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n)$: "$u_n \in [1, \alpha]$".
   Initialisation : $u_1 = 1 \in [1, \alpha]$ donc l'initialisation est démontrée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$, montrons $H(n+1)$. Par $H(n)$, $1 \leq u_n \leq \alpha$.
Par croissance de f, $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$.
Mais $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ par définition. On a donc :

$$f(1) = \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

Enfin, $1 \leq \sqrt{2}$ donc $u_{n+1} \in [1, \alpha]$. Ceci démontre $H(n+1)$, d'où l'hérédité.
Conclusion : On a montré par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in [1, \alpha]}$

(*b*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $u_n \in [1, \alpha]$ d'après la question précédente. D'après la question $1c$ relative au signe de g:

$$g(u_n) \geq 0.$$

Ainsi, $f(u_n) - u_n \geq 0$ d'où $u_{n+1} \geq u_n$.

On a démontré $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$: $\boxed{\text{La suite } u \text{ est croissante.}}$

(*c*) u est croissante d'après la question précédente, et majorée par α d'après la question $2a$. D'après le théorème de la limite monotone, u converge vers un réel l.

On a alors $u_n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} l + 1$, et la suite u étant minorée par 1, par passage à la limite des inégalités :

$$l \geq 1.$$

Ainsi, $l + 1 \in \mathbb{R}_+$. Par composition avec la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ continue sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{u_n + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{l+1}.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \sqrt{u_n + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{l+1} \\ u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}.$$

Par unicité de la limite :

$$l = \sqrt{l+1}$$

On a donc $f(l) = l$ et $l \geq 1$. D'après la question $1b$, $l = \alpha$.

$\boxed{\text{Finalement, } u \text{ converge vers } \alpha.}$

3. (*a*) Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : \text{"} u_{n+1} \leq u_n \text{"}.$$

Initialisation : $P(0)$ s'écrit $u_1 \leq u_0$. Calculons u_1.

$u_1 = f(u_0) = f(2) = \sqrt{3}$. Or, $3 < 4 \implies \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$.

Par conséquent, $u_1 < u_0$, d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$:

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Par croissance de f :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$

Ceci démontre $P(n+1)$ d'où l'hérédité.

On a montré par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } u \text{ est donc décroissante.}}$ Remarquons au passage qu'on peut montrer, avec les mêmes arguments et la monotonie stricte de f, que u est strictement décroissante.

(b) La suite u est décroissante, et minorée par 0 car une récurrence immédiate montre : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (car f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).

Par le théorème de la limite monotone, la suite u converge vers un réel l. On sait de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

Par passage à la limite des inégalités :

$$l \geq 0.$$

Enfin, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $\sqrt{u_n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{l+1}$. Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n n + 1 = \sqrt{u_n+1}$. Donc par unicité de la limite :

$$l = \sqrt{l+1}.$$

On en tire $l = \alpha$ ou $l = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, et vu que $l \geq 0$, il vient :

$$l = \alpha.$$

$\boxed{\text{Finalement, la suite } u \text{ converge vers } \alpha.}$

4. Tout d'abord, on en peut déduire de ces données que u est croissante. En effet, la suite considérée dans les questions du 3 vérifie ces hypothèses (avec $f(x) = \sqrt{x+1}$) et est décroissante et non constante (sinon, elle convergerait vers $u_0 = 2$, or $2 \neq \alpha$), donc non croissante (toute suite croissante et décroissante est constante).

Pour démontrer que u est monotone, on procède par disjonction des cas.

1e cas : Si $u_1 \leq u_0$.

Dans ce cas, montrons que u est décroissante.

Démontrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "u_{n+1} \leq u_n".$$

Initialisation : $P(0)$ s'écrit $u_1 \leq u_0$, ce qui est vrai par hypothèse (du 1e cas), d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par $P(n)$:

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Par croissance de f :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$

Ceci démontre $P(n+1)$ d'où l'hérédité.

On a bien démontré que dans ce cas, u est décroissante (donc monotone).

2e cas : Sinon, $u_1 > u_0$ et on montre, de même, que u est croissante (récurrence similaire, les inégalités sont échangées partout).

Dans tous les cas, la suite u est monotone.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $\dfrac{2}{x}$ est bien défini et positif comme quotient de réels positifs (à dénominateur non nul).

Par conséquent, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ est un réel bien défini et supérieur à 1 donc strictement positif.

Ainsi, $\boxed{f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \text{ est bien définie.}}$

Une récurrence immédiate montre que pour tout entier n, u_n est bien défini et $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (le seul argument étant que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$).

2. f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme des fonctions décroissantes $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \dfrac{2}{t}$.

   Par conséquent, pour tout $x \in [1,3]$:
   $$1 \leq x \leq 3 \implies f(3) = 2 \leq f(x) \leq f(1) = 3 \implies 1 \leq x \leq 3.$$

   $\boxed{\text{Ceci démontre bien } f([1,3]) \subset [1,3].}$

   Montrons par récurrence :

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3].}$

   L'initialisation est claire ($u_0 = 1 \in [1,3]$), et pour l'hérédité, si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $u_n \in [1,3]$, alors $f(u_n) \in [1,3]$ car $f([1,3]) \subset [1,3]$, donc $u_{n+1} \in [1,3]$, ce qui conclut.

3. Soit $g = f \circ f$. Alors, g est croissante comme composée de deux fonctions décroissantes (f est décroissante).

   De plus, pour tout entier n :
   $$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(v_n).$$

   De plus, $u_1 = 1 + \dfrac{2}{1} = 3$ puis $u_2 = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$. Donc $v_1 = \dfrac{5}{3} \geq v_0 = 1$.

   On a donc $v_0 \leq v_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$, où g est croissante.

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: "$v_{n+1} \geq v_n$".

   (Ici, on refait le raisonnement de l'exercice 1, question 4 : le résultat n'est pas au programme, il faut le refaire.)

   Initialisation : On a déjà montré $v_1 \geq v_0$, ce qui est $P(0)$, d'où l'initialisation.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

   Par $P(n)$, $v_{n+1} \geq v_n$. Par croissance de g, $v_{n+2} = g(v_{n+1}) \geq g(v_n) = v_{n+1}$. Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

   Finalement, $\boxed{\text{La suite } v \text{ est croissante.}}$

4. De même, pour tout entier n, $w_{n+1} = g(w_n)$ et on a $w_1 = u_3 = 1 + \dfrac{2}{u_2} = 1 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{11}{5}$ donc $w_1 \leq w_0 = 3$ (car $11 \leq 3 \times 5$).

   Par un raisonnement similaire à celui écrit question 4 exercice 1, w est décroissante.

5. Les suites v et w sont monotones. De plus,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3]$$
   donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n} \in [1,3] \text{ et } w_n = u_{2n+1} \in [1,3].$$

   Ainsi, v et w sont monotones et bornées. Par le théorème de la limite monotone, v et w convergent. Notons l la limite de v, et l' la limite de w.

   Alors, $1 \leq v_n \leq 3$ pour tout entier n, donc par passage à la limite des inégalités :
   $$1 \leq l \leq 3$$
   et de même :
   $$1 \leq l' \leq 3$$

   De plus, $g : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{1 + \frac{2}{x}}$ est continue sur son domaine de définition ($\mathbb{R}_+^*$ ici) comme fraction rationnelle. Donc, comme $l \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \implies g(v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(l).$$

   Mais on a aussi :
   $$g(v_n) = v_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Par unicité de la limite :
$$g(l) = l.$$

Par un raisonnement similaire :
$$g(l') = l'.$$

Résolvons donc l'équation $g(x) = x$ d'inconnue $x \in [1, 3]$.

Soit $x \in [1, 3]$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \\ &\iff 1 + \frac{2}{x} + 2 = x + 2 \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$X^2 - X - 2$ est un polynôme du second degré, de discriminant 9 et donc de racines -1 et 2.

Ainsi, comme $x \in [1, 3]$:
$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

L'unique réel $x \in [1, 3]$ tel que $g(x) = x$ est donc 2 : $l = l' = 2$.

$\boxed{\text{Finalement, } v \text{ et } w \text{ convergent vers 2.}}$

6. Les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite 2, d'après la question précédente. Par théorème sur les sous suites de rangs pairs et impairs, $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge également vers 2}}$.

Exercice 3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $nx^{n-1} \geq 0$ donc $f_n'(x) \geq 1 > 0$.

Ainsi, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: on en déduit qu'elle est injective sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$ donc $0 \in [f_n(0), f_n(1)]$

Or, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable)

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

C'est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ car f_n est injective de $\mathbb{R}_+$.

Enfin, $x_n \neq 0$ et $x_n \neq 1$ car $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. (*)

Ainsi,

$$\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+, \text{ et celle-ci appartient à }]0,1[.}$$

(*) : Il y avait plus simple : $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition, $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_n(x_n) = 0$

ie $x_n^n + x_n - 1 = 0$ d'où $x_n^n = 1 - x_n$

Il vient $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1)$

Comme $x_n \in]0,1[$, on a $x_n^n > 0$ et $x_n - 1 < 0$ donc $f_{n+1}(x_n) < 0$

D'où $\boxed{f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$$

Par (stricte) croissance de f_{n+1}, on a

$$x_n < x_{n+1}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante}}$$

4. D'après la question précédente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

D'après la question 1, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.

Ainsi, le théorème de convergence monotone donne la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_1 \underset{\text{croissance}}{\leq} x_n \underset{\text{Q1}}{\leq} 1$$

par préservation des inégalités larges par passage à la limite :

$$x_1 \leq \ell \leq 1$$

Déterminons x_1 : c'est l'unique solution de $x^1 + x - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.

Ainsi $x_1 = \frac{1}{2}$ et alors $0 < \frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$

Il vient $\boxed{0 < \ell \leq 1}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq n$, on a :

$$x_n \leq x_m \quad \left(\text{stricte croissance de la suite } (x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}\right)$$

On fait tendre n vers $+\infty$.
Par préservation des inégalités larges par passage à la limite, on a :

$$x_n \leq \ell$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \leq \ell}$

6. Montrons que $\ell = 1$.
Par l'absurde, supposons que $\ell \neq 1$.
Comme $\ell \in]0,1]$, on en déduit $0 < \ell < 1$

Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^n = 1 - x_n$

D'une part : $x_n^n = e^{n \ln x_n} \xrightarrow[n,\infty]{} 0$

car $\ln x_n \xrightarrow[n,\infty]{} \ln \ell$ par continuité du ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$n \ln x_n \xrightarrow[n,\infty]{} -\infty$ car $\ell \in]0,1[$ donc $\ln \ell < 0$

$e^{n \ln x_n} \xrightarrow[n,\infty]{} 0$ par composition.

D'autre part, $1 - x_n \xrightarrow[n,\infty]{} 1 - \ell$

Par unicité de la limite, on aurait donc $0 = 1 - \ell$
d'où $\ell = 1$. $\lightning$

Ainsi $\boxed{\ell = 1}$

Exercice 4 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Tout d'abord, notons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^3 + x + 1 \geq 0$.
De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{x^3 + x + 1} = n \iff x^3 + x + 1 = n^2.$$

(car $n \geq 0$ et la fonction carré est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$)

Posons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 + x + 1 \end{array}$

La fonction g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$,
et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$.
Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
De plus elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ car dérivable.
D'après le théorème de bijection monotone, g induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $g(\mathbb{R}_+) = [g(0), \lim_{x \to +\infty} g(x)[= [1, +\infty[$
Or $n^2 \in [1, +\infty[$ donc il existe un unique élément u_n de $\mathbb{R}_+$ tel que $g(u_n) = n^2$. Avec l'équivalence :

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geq 1, \text{ l'équation } \sqrt{x^3 + x + 1} = n \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$,

$$n^2 \leq (n+1)^2$$

Et alors, par définition de u_n

$$g(u_n) \leq g(u_{n+1})$$

Puis, par stricte croissance de g sur $\mathbb{R}_+$

$$u_n \leq u_{n+1}$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$g(n) = n^3 + n + 1 \geqslant n^2$. car $n^3 \geqslant n^2$ puisque $n \geqslant 1$
$n+1 \geqslant 0$

Donc $g(U_n) \leqslant g(n)$ par définition de $(U_n)_n$

Par stricte croissance de g :

$$U_n \leqslant n$$

On a montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n \leqslant n}$$

4. Par l'absurde, supposons que u est majorée.

On dispose alors de $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leqslant M$.

Par stricte croissance de g, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(U_n) \leqslant g(M)$$

ie $$n^2 \leqslant g(M)$$

Ainsi, la suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée (par $g(M)$) : ce qui est absurde.

Alors $\boxed{u \text{ n'est pas majorée.}}$

Or, on sait que u est croissante.

D'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{U_n \xrightarrow[n,\infty]{} +\infty}$$