TD de mathématiques n°14 : Théorie des graphes

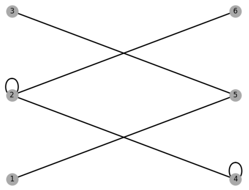
Pour commencer

Exercice 1 *Vrai ou faux?*

(*a*) Un graphe est non connexe si, et seulement si, il a un sommet isolé.

(*b*) Dans un groupe de 20 élèves, il est possible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, que neuf d'entre eux aient exactement 4 amis, et que quatre d'entre eux aient exactement 7 amis.

(*c*) Le graphe suivant est connexe :

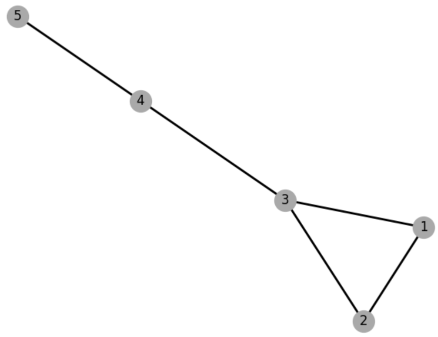


(*d*) Le graphe de la question précédente est bipartis.

(*e*) Dans un graphe non orienté simple et connexe, il existe toujours deux sommets de même degré.

(*f*) Dans un graphe non orienté simple, il existe toujours deux sommets de même degré.

Exercice 2 Considérons le graphe représenté ci-dessous.

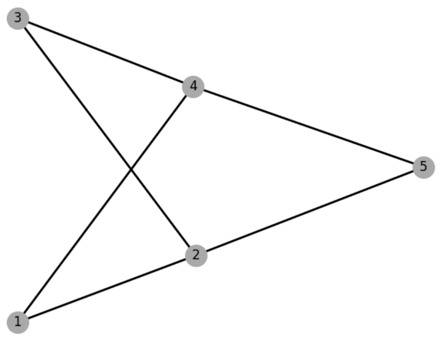


(*a*) Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

(*b*) Combien de chemins de longueur 4 existe-t-il entre les sommets 1 et 4 ? Lister ces chemins.

(*c*) Démontrer par un calcul que ce graphe est connexe.

Exercice 3 Considérons le graphe représenté ci-dessous.



(*a*) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.

(*b*) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{2k+1} = 6^k M$.

(*c*) En déduire le nombre de chemins de longueur 5 allant du sommet 2 au sommet 3.

Exercice 4 Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe orienté, et M une matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

(a) On suppose qu'il existe un entier naturel d tel que M^d est à coefficients strictement positifs. Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

(b) On suppose $S = [\![1, 5]\!]$ et $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 1), (5, 4)\}$.

(i) Représenter graphiquement $\mathcal{G}$.

(ii) Déterminer la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$.

(iii) Calculer M^3, en déduire que $\mathcal{G}$ est connexe.

Exercice 5 Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe simple non orienté d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ possédant au moins une arête.

(a) On suppose qu'il n'existe aucun cycle dans $\mathcal{G}$. Montrer que $\mathcal{G}$ a au moins deux sommets de degré 1. *On pourra admettre l'existence d'une chaîne sans répétition d'arêtes de longueur maximale.*

(b) Montrer par récurrence sur n que si $\mathcal{G}$ n'a aucun cycle, alors $\mathrm{Card}(A) \leq n - 1$.

(c) On suppose qu'il existe un unique cycle dans $\mathcal{G}$, au choix près du sommet de départ. Montrer $\mathrm{Card}(A) \leq n$.

Exercice 6 *Notion d'arbre.*

On appelle arbre tout graphe simple, non orienté, connexe et sans cycle. Les graphes considérés dans cet exercice sont tous simples et non orientés.

(a) Donner quelques exemples d'arbres.

(b) A l'aide des idées de l'exercice précédent, montrer que si $G = (S, A)$ est un arbre, alors $\mathrm{Card}(A) = n - 1$, où n est l'ordre de G.

(c) Soit $G = (S, A)$ un graphe. On appelle arbre couvrant de G tout sous-graphe G' de G qui est un arbre et dont l'ensemble des sommets est S. Montrer que G est connexe si et seulement s'il admet un arbre couvrant.

Exercice 7 *Plus difficile.* Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non orienté fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\delta = \min_{s \in S}(\deg(s))$ le plus petit des degrés des sommets de $\mathcal{G}$.

(a) Montrer que si $\delta \geq 2$, alors $\mathrm{Card}(A) \geq n$.

(b) En déduire que si $\mathcal{G}$ est connexe, alors $\mathrm{Card}(A) \geq n - 1$.

(c) Donner un exemple de graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ connexe tel que $\mathrm{Card}(A) = n - 1$.

(d) Montrer que si $\mathrm{Card}(A) = n - 1$ et $\mathcal{G}$ n'a aucun cycle, alors $\mathcal{G}$ est connexe. On pourra utiliser un résultat de l'exercice 5.

Exercice 8 Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre pair $2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p. Montrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

On montrera que deux sommets quelconques de $\mathcal{G}$ sont reliés par une chaîne de longueur au plus 2.

Exercice 9 *Penser au théorème d'Euler* Montrer que si $\mathcal{G}$ est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair, alors le graphe obtenu en retirant une arête à $\mathcal{G}$ est toujours connexe.

Exercice 10 *Exercice du cours. La question* (e) *est importante (gros calcul classique).* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K_n le graphe complet d'ordre n de sommets $1, 2, \ldots, n$.

(a) Quel est le nombre total d'arêtes de K_n ?

(b) Donner la matrice d'adjacence M de K_n.

(c) Donner une matrice J telle que $M = J - I_n$.

(d) Calculer J^p pour tout entier naturel p.

(e) En déduire le calcul de M^p, pour tout entier naturel p.

(f) Donner le nombre de chaînes de longueur p de i vers j dans K_n, en fonction de i et j.

Exercice 11 ***Tous les graphes considérés dans cet exercice sont non orientés.***

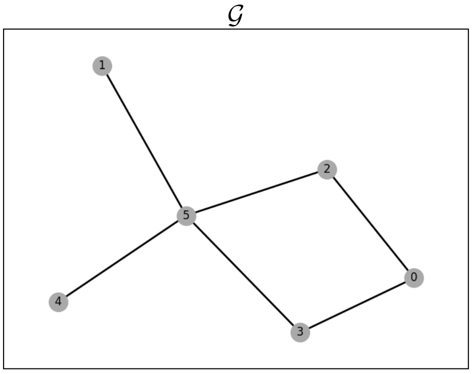
Pour tout graphe non orienté $\mathcal{G} = (S, A)$, on appelle ***graphe des arêtes complémentaires*** le graphe noté $\bar{\mathcal{G}}$ donné par :

$$\bar{\mathcal{G}} = (S, A')$$

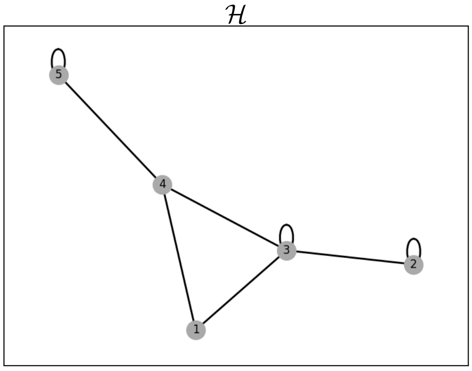
où $A' = \{\{u, v\} | (u, v) \in S^2 \text{ tel que } \{u, v\} \notin A\}$.

(*a*) (*i*) Représenter le graphe des arêtes complémentaires de chaque graphe représenté ci-dessous.

$\mathcal{G}$



$\mathcal{H}$



(*ii*) Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté. Notons n son ordre et fixons une numérotation $s_1, \ldots, s_n$ des sommets de $\mathcal{G}$. On note M la matrice d'adjacence obtenue pour $\mathcal{G}$, et M' la matrice d'adjacence ainsi obtenue pour $\bar{G}$. Déterminer $M + M'$.

(*b*) Le but des sous questions suivantes est de démontrer le théorème suivant : dans groupe de 6 personnes dont certaines sont amies et d'autres non ("être ami" étant symétrique), il existe systématiquement trois personnes qui sont ou bien toutes amies entre elles, ou bien toutes non-amies entre elles.

On considère donc un tel groupe de 6 personnes, numérotées de 1 à 6, et on note $\mathcal{G}$ le graphe donnant les relations d'amitié entre ces personnes (les sommets sont les entiers de 1 à 6, et il y a une arête entre les sommets i et j ssi les personnes i et j sont amies).

(*i*) Formuler, en terme de propriété de graphe, la propriété, notée $\mathcal{P}$, qu'on doit démontrer sur le graphe $\mathcal{G}$ pour prouver le théorème ci-dessus.

(*ii*) Montrer que $\mathcal{G}$ vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement si $\bar{\mathcal{G}}$ vérifie P.

(*iii*) Soit s un sommet de $\mathcal{G}$. Montrer que : s a au moins trois voisins dans $\mathcal{G}$, ou s a au moins trois voisins dans $\bar{\mathcal{G}}$.

(*iv*) Conclure à l'aide d'une disjonction des cas.

(*v*) Montrer qu'il existe un graphe d'ordre 5 ne vérifiant pas la propriété $\mathcal{P}$.

(*vi*) La propriété $\mathcal{P}$ est-elle vérifiée par tout graphe d'ordre plus grand que 6?

Exercice 12 Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe simple non orienté et connexe d'ordre $n \geq 2$.

Si s et t sont deux sommets de $\mathcal{G}$, on appelle ***distance*** de s à t l'entier noté $d(s,t)$ donné par la plus petite longueur d'une chaîne de $\mathcal{G}$ de s vers t. On a en particulier $d(s,s) = 0$.

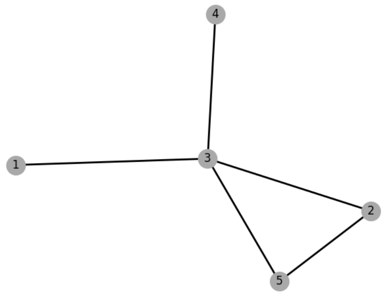
Pour tout $s \in S$, on appelle ***excentricité*** de s dans $\mathcal{G}$ l'entier $e(s) = \max\limits_{t \in S} d(s,t)$.

On appelle ***diamètre*** du graphe $\mathcal{G}$ l'entier : $D_{\mathcal{G}} = \max\limits_{s \in S} e(s)$.

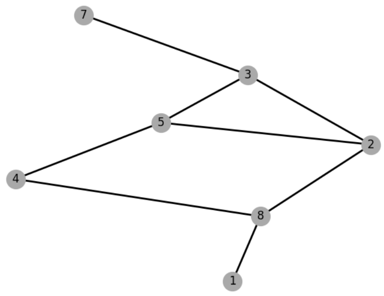
On appelle ***rayon*** du graphe $\mathcal{G}$ l'entier $\rho_{\mathcal{G}} = \min\limits_{s \in S} e(s)$.

On appelle ***centre*** du graphe $\mathcal{G}$ l'ensemble : $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} = \{s \in S, e(s) = \rho_{\mathcal{G}}\}$.

(a) On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci dessous. Déterminer $e(s)$ pour chaque sommet s de $\mathcal{G}$. En déduire $D_{\mathcal{G}}$, $\rho_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$.



(b) Même question pour le graphe ci-dessous.



(c) On revient au cas général. Montrer que pour tous sommets s et g :

(i) $d(s,t) = 0 \iff s = t$.

(ii) $d(s,t) = d(t,s)$.

(iii) Pour tout sommet u, $d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t)$.

On dit que d est une distance sur l'ensemble des sommets.

(d) A quelle condition nécessaire et suffisante sur $\mathcal{G}$ as-t-on $D_{\mathcal{G}} = 1$?

(e) Montrer $D_{\mathcal{G}} \leq 2\rho_{\mathcal{G}}$.