Correction du DM n°3

Exercice 1

Nous allons montrer que les suites u et v sont adjacentes.

1. Montrons que u est décroissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{(n+1)^2} + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} && (\sqrt{(n+1)^2} = n+1 \text{ car } n+1 \geq 0)
\end{aligned}$$

   Ainsi, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)$*(Remarque : pour avoir ce signe, on peut aussi invoquer l'inégalité arithmético-géométrique)).* Or par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ (les quantités sont positives) :

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq (2n+1) \iff 4n(n+1) \leq (2n+1)^2 \iff 4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1.$$

   La dernière inégalité étant toujours vraie, on a $2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1) \leq 0$ donc u est bien décroissante.

2. Montrons que v est croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 2\sqrt{(n+1)^2}}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{(2n+3) - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}} && (\sqrt{(n+1)^2} = n+1 \text{ car } n+1 \geq 0)
\end{aligned}$$

   Or les quantités étant positives et encore par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$2n+3 \geq 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \iff (2n+3)^2 \geq 4(n+1)(n+2) \iff 4n^2 + 12n + 9 \geq 4n^2 + 12n + 8$$

   et la dernière inégalité étant vraie, on a $v_{n+1} - v_n \geq 0$ donc la suite v est bien croissante.

3. Montrons que $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_n - v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\
&= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) && \text{(appliquons la quantité conjuguée)} \\
&= 2\frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} && (\text{car } \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{1} + \sqrt{0} > 0) \\
&= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Par somme, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par inverse, on a bien

$$u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement, les trois points ci-dessus montrent que les suites u et v sont adjacentes.

$\boxed{\text{D'après le théorème de suites adjacentes, } u \text{ et } v \text{ convergent, et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.}$

Exercice 2

Soit n un entier tel que u_n est bien défini et positif. Alors, $1+u_n^2 \geq 1$ donc u_{n+1} est bien défini par la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$, et u_{n+1} est positif comme quotient de nombres positifs. $u_0 = 1$ donc u_0 est positif. La rédaction par récurrence habituelle *(vous, vous la rédigez!)* montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et positif.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $1+u_n^2 \geq 1$ car $u_n^2 \geq 0$, donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{1}{1+u_n^2} \leq 1$. Or, $u_n \geq 0$: il vient

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} \leq u_n.$$

Ainsi, u est décroissante. u étant positive, elle est minorée. D'après le théorème de la limite monotone, u est convergente. Soit l la limite de u.

Par opérations : $1+u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+l^2$.

Or, $1+l^2 \neq 0$ donc : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{l}{1+l^2}$. Or, u converge vers l donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. Par unicité de la limite :

$$l = \frac{l}{1+l^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors $x = \dfrac{x}{1+x^2}$. Sinon :

$$x = \frac{x}{1+x^2} \iff 1 = \frac{1}{1+x^2} \iff 1+x^2 = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

Ainsi, l'unique réel x tel que $x = \dfrac{x}{1+x^2}$ est 0. Donc $l = 0$.

$\boxed{\text{Finalement, la suite } u \text{ converge vers } 0.}$

Exercice 3

1. D'après la formule du binôme de Newton, pour tout entier n :

$$P_n(X) = (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant $P_n(X) = (X+1)^n$, on trouve :

$$P_n'(X) = n(X+1)^{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} X^k.$$

En dérivant $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$, on trouve :

$$\begin{aligned} P_n'(X) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k X^{k-1} && \text{(le terme s'annule pour } k=0) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n}{j+1} X^j && \text{(on pose } j = k-1) \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on trouve

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], n\binom{n-1}{j} = (j+1)\binom{n}{j+1}$$

donc (en "posant $k = j+1$ dans l'énoncé ci-dessus")

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}}$$

3. Il s'agit de démontrer :

$$P_n(X)P_m(X) = \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right)X^p.$$

On pouvait le démontrer en manipulant soigneusement une double somme, ou avec la formule du cours comme ci-dessous. On sait que si $A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ sont deux polynômes, alors la fonctions AB est le polynôme donné par

$$(AB)(X) = \sum_{p=0}^{n+m} c_p X^p$$

où l'on a posé, pour $p \in [\![0, n+m]\!]$,

$$c_p = \sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$$

avec comme convention $a_k = 0$ et $b_l = 0$ pour $k > n$ et $l > m$.

Ici, on applique cette formule avec $a_k = \binom{n}{k}$ et $b_l = \binom{m}{l}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $l \in [\![0, m]\!]$. On remarque que si $k > n$ et $l > n$, alors

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ et } \binom{m}{l} = 0$$

de sorte que les coefficients binomiaux permettent d'écrire la formule des coefficients du produit ci-dessus. Il vient :

$$\boxed{P_n(X)P_m(X) = \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right)X^p}$$

ce qui est la formule voulue.

4. On a aussi par le binôme de Newton:

$$P_n(X)P_m(X) = (X+1)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m}\binom{n+m}{p}X^p.$$

Donc :

$$\sum_{p=0}^{n+m}\binom{n+m}{p}X^p = \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right)X^p.$$

Par identification des coefficients :

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n+m]\!], \binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{m-k}}$$

ce qui est la formule voulue.

Exercice 4

1. Soit T l'événement " on a tiré la pièce truquée" et F_1 l'événement "on obtient face au premier lancer". Le tirage de la pièce se faisant en situation d'équiprobabilité, on a $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{5}$ et donc $\mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{4}{5}$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement $(T, \bar{T})$ donne :

$$\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(F_1) + \mathbb{P}(\bar{T})\mathbb{P}_{\bar{T}}(F_1) = \frac{1}{5}\mathbb{P}_T(F_1) + \frac{4}{5}\mathbb{P}_{\bar{T}}(F_1).$$

Or, $\mathbb{P}_T(F_1) = 1$ car la pièce truquée contient deux faces "face". De plus, $\mathbb{P}_{\bar{T}}(F_1)$ est la probabilité de faire "face" en lançant une pièce classique équilibrée, donc vaut $\frac{1}{2}$. Finalement :

$$\mathbb{P}(F_1) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}.$$

2. On cherche $\mathbb{P}_{F_1}(T)$. D'après la formule de Bayes (aucune des probabilités envisagées n'est nulle):

$$\boxed{\mathbb{P}_{F_1}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(F_1) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(F_1)}}$$

donc d'après la question précédente :

$$\boxed{\mathbb{P}_{F_1}(T) = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{3}}$$

3. Soit F_n l'événement "on a obtenu face aux n lancers".

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(T, \bar{T})$:

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(F_n) + \mathbb{P}(\bar{T})\mathbb{P}_{\bar{T}}(F_n).$$

Or, $P_T(F_n) = 1$ car la pièce truquée ne comporte que des "face". Calculons $\mathbb{P}_{\bar{T}}(F_n)$, qui est la probabilité de faire n faces de suite avec une pièce classique équilibrée. Il y a 2^n résultats possibles au lancer d'une telle pièce équilibrée n fois, et la pièce étant équilibrée, tous les résultats sont équiprobables. Donc $\mathbb{P}_{\bar{T}}(F_n) = \frac{1}{2^n}$. *On pouvait argumenter avec l'indépendance mutuelle des lancers.* Finalement :

$$\mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2^n} = \frac{2^n + 4}{5 \times 2^n} = \frac{2^{n-2} + 1}{5 \times 2^{n-2}}.$$

4. On cherche $p_n = \mathbb{P}_{F_n}(T)$, d'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{F_n}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(F_n) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(F_n)} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{\frac{2^{n-2}+1}{5 \times 2^{n-2}}} = \frac{2^{n-2}}{2^{n-2} + 1}.$$

Or,

$$\frac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-2}}}$$

$2^{n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $2 > 1$ donc par opérations, il vient

$$p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^{n-2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1} = 1.$$

$\boxed{\text{La limite de } p_n \text{ est } 1}$, ce qui est cohérent.

Exercice 5

1. Par définition, $\text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \binom{n+m}{k}$ car $\mathcal{P}_k(E)$ est l'ensemble des parties de cardinal k de E, qui est de cardinal $n+m$.

   De même, $\text{Card}(\mathcal{P}_p(A)) = \binom{n}{p}$ et $\text{Card}(\mathcal{P}_{k-p}(B)) = \binom{m}{k-p}$ car B est de cardnal $n+m-n=m$.

2. Montrons d'abord que la réunion est disjointe. Soient p et p' deux éléments distincts de $[\![0,p]\!]$. Alors :

$$\mathcal{A}_{k,p}(E) \cap \mathcal{A}_{k,p'}(E) = \{U \in \mathcal{P}_k(E) | \text{Card}(U \cap A) = p \text{ et } \text{Card}(U \cap A) = p'\} = \emptyset$$

   car $p \neq p'$. Ainsi,

$$\bigcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E) = \bigsqcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E).$$

   Montrons maintenant $\mathcal{P}_k(E) = \bigsqcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E)$.

   Il est clair que $\bigsqcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E) \subset \mathcal{P}_k(E)$ car chaque $\mathcal{A}_{k,p}(E)$ (pour $0 \leq p \leq k$) est une partie de $\mathcal{P}_k(E)$.

   Réciproquement, soit $U \in \mathcal{P}_k(E)$. Notons $r = \text{Card}(U \cap A)$. On a bien $0 \leq r \leq k$ car $\text{Card}(U \cap A) \leq \text{Card}(U) = k$.

   Alors, $U \in \mathcal{A}_{k,r}(E)$, donc $U \in \bigsqcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E)$. On a bien démontré l'autre inclusion d'où :

$$\mathcal{P}_k(E) = \bigsqcup_{p=0}^{k} \mathcal{A}_{k,p}(E).$$

3. Tout d'abord, si $U \in \mathcal{A}_{k,p}(E)$ alors par définition $\text{Card}(U \cap A) = p$ donc $U \cap A \in \mathcal{P}_p(A)$. De plus, $B = \bar{A}$ donc $(U \cap B) \sqcup (U \cap A) = U$, ce qui montre :

$$\text{Card}(U \cap B) = \text{Card}(U) - \text{Card}(U \cap A) = k - p$$

   et on a bien $U \cap B \in \mathcal{P}_{k-p}(B)$.

   Ainsi, on a bien $(U \cap A, U \cap B) \in \mathcal{P}_p(A) \times \mathcal{P}_{k-p}(B)$ donc l'application ϕ_p est bien définie.

   Montrons que ϕ_p est bijective.

   Surjectivité :

   Soit $(C, D) \in \mathcal{P}_p(A) \times \mathcal{P}_{k-p}(B)$. Posons $U = C \cup D$. Alors, C et D sont disjoints. En effet, $C \subset A, D \subset B$ et A et B sont disjoints. Ainsi, $\text{Card}(U) = \text{Card}(C) + \text{Card}(D) = p + k - p = k$, et $C = U \cap A$ est de cardinal p donc U est bien un élément de $\mathcal{A}_{k,p}(E)$.

   De plus,

$$\begin{aligned} \phi_p(U) &= ((C \cup D) \cap A, (C \cup D) \cap B) \\ &= ((C \cap A) \cup (D \cap A), (C \cap B) \cup (D \cap B)) && \text{(distributivité)} \\ &= (C, D) && \text{car } C \subset A, D \subset B, A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

   Ainsi, U est un antécédent de (C, D) donc ϕ_p est bien surjective.

   Injectivité :

   L'assertion $\forall U \in \mathcal{P}(E), U = (U \cap A) \cup (U \cap B)$ (car $E = A \cup B$) montre de suite que ϕ_p est injective : si U et U' vérifient $\phi_p(U) = \phi_p(U') = (C, D)$, alors $U = C \cup D = U'$.

   Finalement, ϕ_p est bien définie et bijective.

4. D'après la question précédent et le principe de bijection :

$$\text{Card}(\mathcal{A}_{k,p}(E)) = \text{Card}(\mathcal{P}_p(A) \times \mathcal{P}_{k-p}(B)) = \text{Card}(\mathcal{P}_p(A))\text{Card}(\mathcal{P}_{k-p}(B)) = \binom{n}{p}\binom{m}{k-p}.$$

5. D'après la question 2, la réunion étant disjointe, on a :

$$\binom{n+m}{k} = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{Card}(\mathcal{A}_{k,p}(E))$$

donc avec la question précédente :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{m}{k-p}$$

ce qui est la formule voulue.