Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir maison n°4

À rendre le vendredi 13 février 2026

Énoncé de l'exercice

Le but de ce problème est de se familiariser avec l'étude de chaines de Markov, un contexte probabiliste dans lequel la résolution passe par du calcul matriciel. Les parties I et II sont indépendantes mais suivent une démarche commune.

Dans chaque partie où une expérience aléatoire est décrite, on admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

Partie I : un premier exemple

Dans cette partie, on considère pour tout réel a la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter M_0 et $M_{\frac{1}{2}}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la matrice M_a soit inversible.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer deux réels α et β tels que
$$M_a = \alpha J + \beta I_2.$$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α, β deux réels. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} 2^{k-1}$.
6. Déduire des questions précédentes :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, M_a^n = (1-2a)^n I_2 + \frac{1}{2}(1-(1-2a)^n)J.$$
Expliciter alors M_a^n en fonction du réel a et de l'entier n.
7. Soit $a \in]0,1[$. Un enfant joue avec un interrupteur. Chaque minute, il change d'état l'interrupteur avec une probabilité a, et le laisse donc dans son état avec une probabilité $1-a$. On note, pour tout entier n, a_n la probabilité que l'interrupteur soit allumé au bout de n minutes et $b_n = 1 - a_n$. L'interrupteur est initialement allumé : $a_0 = 1$.
   - (a) Interpréter b_n comme une probabilité, pour tout entier n.
   - (b) On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier n. Montrer
   $$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = M_a X_n.$$
   - (c) En déduire une expression de X_n en fonction de M_a et de X_0, pour tout entier n.
   - (d) Déduire des questions précédentes les valeurs de a_n et b_n pour tout entier n.

Partie II

On considère maintenant la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $M = \dfrac{1}{4}A$.

8. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

9. On pose $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$. En déduire $A = PDP^{-1}$.

10. En déduire que pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter D^n.

12. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Un élève répond à un QCM au hasard. Chaque question a 3 étiquettes de réponses possibles : (a), (b) et (c). Il décide de tirer au hasard ses réponses de la manière suivante :

- Il tire à pile ou face (avec une pièce équilibrée) sa réponse à la première question, entre les étiquettes (a) et (b).
- S'il a répondu à une question, il répond à la suivante par la réponse de même étiquette avec probabilité $1/2$ et choisit une des deux autres étiquettes chacune avec probabilité $1/4$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que l'élève réponde à la question numéro n avec les étiquettes (a), (b) et (c).

13. Soit $n > 0$ un entier. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

14. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n > 0$. Expliciter X_1.

15. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et X_n pour tout entier n.

16. Déduire des questions précédentes les valeurs de a_n, b_n et c_n pour tout entier $n > 0$.

— *fin* —