Devoir surveillé n°4

Devoir du **samedi 31 janvier 2026**.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit.
Consignes de présentation : Écrire avec une encre bleue sombre ou noire. Encadrer les résultats. Ne pas utiliser la couleur rouge. Écrire de façon lisible. Éviter les ratures. **Utiliser une règle**.
Consignes de rédaction : Rédiger les raisonnements en français, dans une langue correcte et soignée, sans utiliser d'abréviation.
On rappelle que le connecteur $\Longrightarrow$ ne peut pas être utilisé comme synonyme de "donc".

Exercice 1 *Quelques application de cours*

1. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots A_n$ des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

   (b) Soient A, B, C trois événements de même probabilité p. On suppose que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.

      i. Déterminer $\mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$.

      ii. En déduire que $p \leq \dfrac{2}{3}$.

      iii. On suppose de plus que les événements sont indépendants deux à deux. Montrer que $p \leq \dfrac{1}{2}$.
      (*indication : on pourra considérer* $\mathbb{P}_C(A \cup B)$ *dans le cas où* $p \neq 0$)

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^3 + t$.

   (a) Étudier les variations de f.

   (b) Écrire un code Python permettant de tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-20, 20]$.

   (c) Montrer que f admet une fonction réciproque g et qu'elle vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)^3 + g(x) = x$.

   (d) Montrer que g est strictement croissante et impaire.

   (e) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ puis montrer que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x^{1/3}} = 1$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on pose $S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que valent $S(n,0)$ et $S(n,n)$?

   (b) i. Écrire les lignes du triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$.

      ii. Écrire un code Python permettant d'afficher les lignes du triangle de Pascal jusqu'à $n = 10$.
      On pourra utiliser une matrice de taille adaptée pour représenter ce tableau de valeurs.

      iii. Calculer $S(4,2)$, $S(4,3)$, $S(5,2)$, $S(5,3)$, $S(5,4)$.

   (c) Conjecturer, en regardant le triangle de Pascal et les résultats précédents, une formule générale donnant $S(n,p)$.

   (d) Prouver cette formule.

   (e) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} S(n,p)$.

4. (*a*) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

(*b*) Ninon et Raphaëlle disposent chacune d'une pièce non truquée, effectuent n lancers et notent dans l'ordre les résultats obtenus.
Considérons les événements suivants :

- A : "Ninon et Raphaëlle obtiennent le même nombre de pile"
- pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: N_k : "Ninon obtient k Pile" et R_k : "Raphaëlle obtient k Pile"

i. Déterminer un univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que son cardinal.
Quelle probabilité $\mathbb{P}$ permet de modéliser cette expérience ?

ii. Déterminer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(N_k)$.

iii. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, que dire des événements N_k et R_k ? Justifier.

iv. Décrire l'événement A en fonction des événements N_k et R_k, $k \in [\![0, n]\!]$.

v. En déduire $\mathbb{P}(A)$.

5. Écrire un code Python prenant en entrée une liste de nombres et renvoyant cette liste triée par ordre décroissant. Nommer la méthode utilisée.

6. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) f est injective ;

(*b*) Pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(*c*) Pour toutes parties A et B de E, on a $A \cap B = \emptyset \implies f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

7. On admet que tout nombre entier naturel n peut se décomposer sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^{N} a_k \times 3^k = a_0 + a_1 \times 3 + \cdots + a_N \times 3^N \qquad (\bigstar_1)$$

où N est un entier naturel et $(a_0, \ldots, a_N)$ est une suite finie d'entiers naturels entre 0 et 2, et $a_N \neq 0$.

(*a*) Écrire une fonction Python prenant un entier n et renvoyant le plus grand entier naturel N tel que $3^N \leq n$.

(*b*) Écrire une fonction Python prenant un entier n et renvoyant la décomposition $(\bigstar_1)$ pour cet entier n.
Indication : On pourra utiliser un algorithme glouton en s'aidant de la fonction précédente.

Exercice 2 *Autour d'une matrice*

On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (*a*) Déterminer un réel a tel que : $A^2 - 8A = aI$.

(*b*) Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

2. (*a*) Résoudre $AX = 6X$, où X est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(*b*) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer PQ. Qu'en déduire ?

   (b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. **Application :** Romain aime lire un livre avant de s'endormir. Il possède trois types de livres : des livres de chevaux, des livres de dinosaures et des livres de princesses. Le choix du livre se fait en fonction du livre qu'il a lu la veille selon le schéma suivant, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   - s'il a lu un livre de chevaux le jour n, il lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,
   - s'il a lu un livre de princesses le jour n, il lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{1}{3}$,
   - s'il a lu un livre de dinosaures le jour n, il lira un livre de chevaux le jour $n+1$ avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de princesses avec probabilité $\frac{1}{6}$ ou un livre de dinosaures avec probabilité $\frac{2}{3}$.

   Le premier jour, il lit un livre de dinosaures. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   - c_n la probabilité qu'il lise un livre de chevaux le jour n,
   - p_n la probabilité qu'il lise un livre de princesses le jour n,
   - d_n la probabilité qu'il lise un livre de dinosaures le jour n.
   - $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que si $c_n \neq 0$, $p_n \neq 0$ et $d_n \neq 0$,
   $$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}d_n$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{6}AX_n$.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de X_n en fonction de n, A et X_1.

   (d) En utilisant la question 3, montrer que $d_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

Exercice 3 *Une suite récurrente*

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$$

1. (a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

2. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$.

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

3. Écrire un code Python permettant de représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = xe^{1/x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

5. Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

6. Écrire un code Python permettant de donner une approximation à 10^{-4} près d'une solution de $f(x) = 3$.

7. (*a*) Pour tout $x > 0$, établir l'inégalité
$$f(x) \geq x + 1.$$
Dans la suite, on admettra que
$$\forall x \geq 1,\ \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x} \qquad (\bigstar_2)$$
(*b*) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (x+1))$.

8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \dfrac{1}{u_k}$.

10. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

11. (*a*) À l'aide des inégalités $(\bigstar_2)$, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$
(*b*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :
$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$
puis
$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e\ln(u_n)$$

12. Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

13. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{u_n}$.

Exercice 4 *Des exercices de probabilités*

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Maëlle est une excellente footballeuse. La probabilité qu'elle marque un but lorsqu'elle tire un pénalty est égale à 2/3. Georges est un peu moins fort. La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est égale à 1/2. Maëlle lance un défi à Georges. Chacun va tirer un pénalty à son tour, en commençant par Georges. Le premier qui marque a gagné.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que Maëlle gagne lors de son n-ième tir ?

2. Soit $n \geq 2$. Une urne contient deux séries distinctes de n jetons numérotés de 1 à n. On vide l'urne en extrayant les jetons deux par deux sans remise. Les tirages se font au hasard.

   (*a*) i. Quelle est la probabilité que les deux premiers jetons tirés soient les deux jetons portant le numéro 1 ?

   ii. Quelle est la probabilité que le deuxième tirage donne les deux jetons portant le numéro 1 ?

   (*b*) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Quelle est la probabilité que deux jetons portant le numéro 1 soient obtenus lors du k-ième tirage ?

   (*c*) Quelle est la probabilité que les deux jetons portant le numéro 1 soient obtenus au même tirage ?

— Fin de l'énoncé —