Correction du DS n°4

Exercice 1

1. (*a*) Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H(n) : \text{" Pour tous événements } A_1, \ldots, A_n, \quad \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\text{"}$$

• <u>Initialisation :</u> $H(1)$ est clair car l'union et la somme ne comporte alors qu'un seul terme.
Montrons $H(2)$ qui nous sera utile dans la suite.
Soient A_1 et A_2 deux événements. Alors, d'après les propriétés de la probabilité :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

Par positivité $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq 0$, d'où

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

Ce qui montre $H(2)$.
• <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$.
Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des événements.
Posons $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ et $B = A_{n+1}$. D'après $H(2)$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Or, d'après $H(n)$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

d'où

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k)$$

Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.
• <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous événements $A_1, \ldots, A_n$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)}$$

(*b*) i. Par passage au complémentaire,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

Or, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$ donc $\boxed{\mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = 1}$

ii. En utilisant la question 1.*a* et la question précédente,

$$1 = \mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \leq \mathbb{P}(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{C})$$

Or, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = p$ donc par passage au complémentaire $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{C}) = 1-p$.
Ainsi,

$$1 \leq 3(1-p)$$

d'où, $\boxed{p \leq \dfrac{2}{3}}$

iii. Si $p = 0$, il est clair que $p \leq \dfrac{1}{2}$.
Si $p \neq 0$, on peut considérer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_C$, et alors :

$$\mathbb{P}_C(A \cup B) = \mathbb{P}_C(A) + \mathbb{P}_C(B) - \mathbb{P}_C(A \cap B)$$

Or, par définition et comme $P(A \cap B \cap C) = 0$,

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = 0$$

De plus, comme A et C sont indépendants et B et C aussi, on a $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_C(B) = \mathbb{P}(B)$
Il vient alors : $\mathbb{P}_C(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 2p$
Une probabilité étant une application à valeurs dans $[0, 1]$, on obtient

$$2p \leq 1 \text{ c'est-à-dire } \boxed{p \leq \frac{1}{2}}$$

2. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = t^2 + 1 \geq 1 > 0$$

car le carré d'un nombre réel est positif.
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

(b)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(t) :
    return t**3 + t
X = np.linspace(-20,20,500)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

(c) Déterminons d'abord les limites de f en $\pm\infty$.
On a $t^3 \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ donc par somme $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.
De même, $t^3 \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$ donc par somme $f(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$.
La fonction f est strictement croissante et continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $f(\mathbb{R}) =]\lim_{t \to -\infty} f(t), \lim_{t \to +\infty} f(t)[= \mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection monotone, $\boxed{f \text{ est bijective}}$. On note g sa fonction réciproque. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = x$ d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)^3 + g(x) = x}$

(d) D'après le théorème de la bijection monotone, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante.}}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) \underset{(1)}{=} g(-f(g(x))) \underset{(2)}{=} g(f(-g(x))) = -g(x)$$

(1) Comme g est la fonction réciproque de f, on a $f(g(x)) = x$
(2) La fonction f est impaire.
On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est impaire.}}$

(e) La fonction g est strictement croissante et non majorée sur $\mathbb{R}$ car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$ Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{t}{f(t)^{1/3}} = \frac{t}{(t^3 + t)^{1/3}} = \frac{t}{t} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{1/3}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}}\right)^{1/3}$$

Par somme et inverse, $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$, et par composition et continuité de la fonction racine cubique

$$\frac{t}{f(t)^{1/3}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

Or, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc par composition,

$$\boxed{\frac{g(x)}{x^{1/3}} = \frac{g(x)}{f(g(x))^{1/3}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S(n,0) = (-1)^0 \binom{n}{0} = 1$$

et, en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$S(n,n) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0^n$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S(n,0) = 1 \ \text{ et } \ S(n,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

(b) i. En utilisant la formule du triangle de Pascal, on obtient rapidement :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

ii.

```python
import numpy as np
n = 10
A = np.eye(n+1,n+1)
for i in range(1,n+1) :
    A[i,0] = 1
    for j in range(1,i+1) :
        A[i,j]=A[i-1,j-1] + A[i-1,j]
print(A)
```

iii.

$$S(4,2) = (-1)^0\binom{4}{0} + (-1)^1\binom{4}{1} + (-1)^2\binom{4}{2} = 1 - 4 + 6 = 3$$

$$S(4,3) = (-1)^0\binom{4}{0} + (-1)^1\binom{4}{1} + (-1)^2\binom{4}{2} + (-1)^3\binom{4}{3} = 1 - 4 + 6 - 4 = -1$$

$$S(5,2) = (-1)^0\binom{5}{0} + (-1)^1\binom{5}{1} + (-1)^2\binom{5}{2} = 1 - 5 + 10 = 6$$

$$S(5,3) = (-1)^0\binom{5}{0} + (-1)^1\binom{5}{1} + (-1)^2\binom{5}{2} + (-1)^3\binom{5}{3} = 1 - 5 + 10 - 5 = -4$$

$$S(5,4) = (-1)^0\binom{5}{0} + (-1)^1\binom{5}{1} + (-1)^2\binom{5}{2} + (-1)^3\binom{5}{3} + (-1)^3\binom{5}{4} = 1 - 5 + 10 - 10 + 5 = 1$$

(c) En regardant la ligne du triangle de Pascal pour $n = 3$ et les coefficients $S(4,\cdot)$, on a

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & -3 & 3 & -1 & 0
\end{array}$$

En regardant la ligne du triangle de Pascal pour $n = 4$ et les coefficients $S(5,\cdot)$, on a

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0
\end{array}$$

On peut émettre la conjecture suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![0, n-1]\!],\ S(n,p) = (-1)^p \binom{n-1}{p}$$

Remarque. On peut étendre cette formule pour $p \in [\![0, n]\!]$ avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

(*d*) On peut éviter une démonstration par récurrence en utilisant un télescopage.
Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. D'après la formule du triangle de Pascal, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S(n,p) &= (-1)^0\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{p}\left[(-1)^k\binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right] \\ &\underset{(1)}{=} 1 + \left[(-1)^p\binom{n-1}{p} - (-1)^0\binom{n-1}{0}\right] \\ S(n,p) &= (-1)^p\binom{n-1}{p} \end{aligned}$$

(1) car on reconnaît une somme télescopique.
Cette formule reste vraie avec $p = 0$. Le cas $n = 1$ étant évident, on a bien montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![0, n-1]\!],\ S(n,p) = (-1)^p\binom{n-1}{p}}$$

(*e*) Si $n = 0$, $S(0,0) = 1$. Fixons alors $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente, la question a et la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{p=0}^{n} S(n,p) = S(n,n) + \sum_{p=0}^{n-1} S(n,p) = \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\binom{n-1}{p} = ((-1)+1)^{n-1} = 0^{n-1}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{p=0}^{n} S(n,p) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

4. (*a*) Soit $n \in \mathbb{N}$, E un ensemble de cardinal $2n$, A une partie de E à n éléments et $B = E \backslash A$ (qui est aussi une partie de E à n éléments).
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties à n éléments de E. Dénombrons de deux manières différentes $\mathcal{C}$.
D'une part, par définition il y a $\binom{2n}{n}$ parties à n éléments de $2n$ donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \binom{2n}{n}$$

D'autre part, pour construire un élément de $\mathcal{C}$, on distingue $n+1$ cas disjoints : pour $k \in [\![0, n]\!]$

- la partie de E contient exactement k éléments de A. Pour construire une telle configuration, on choisit successivement :
  - k éléments dans la partie A. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités
  - $n-k$ éléments dans la partie A. Il y a $\binom{n}{n-k}$ possibilités

  Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ telles parties.

Ces cas étant disjoints, on obtient

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \underset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

(1) par symétrie des coefficients binomiaux

Avec ces deux points :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

(*b*) i. On peut modéliser l'expérience de n lancers successifs d'une pièce par l'univers $\boxed{\Omega = \{P, F\}^n}$. Il vient

$$\text{Card}(\Omega) = \text{Card}(\{P, F\})^n = 2^n$$

La pièce étant non truquée, l'expérience est en situation d'équiprobabilté. On peut donc munir Ω de sa $\boxed{\text{probabilité uniforme } \mathbb{P}}$.

ii. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comme la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme,

$$\mathbb{P}(N_k) = \frac{\text{Card}(N_k)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Dénombrons l'ensemble N_k. Un élément de N_k est entièrement déterminer par la position des "Pile" dans les n lancers. Il y a donc autant de possibilités que de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n, donc $\binom{n}{k}$. Par conséquent,

$$\text{Card}(N_k) = \binom{n}{k}$$

Il vient

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(N_k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}}$$

iii. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\text{les événements } N_k \text{ et } R_k \text{ sont indépendants}}$ car les résultats de Ninon n'influencent pas ceux de Raphaëlle, et vice-versa.

iv. L'événement A est réalisé lorsque Ninon et Raphaëlle obtiennent le même nombre de "Pile", c'est-à-dire lorsqu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que Ninon et Raphaëlle aient obtenu exactement k "Pile". Ces cas étant disjoints, on a

$$\boxed{A = \bigsqcup_{k=0}^{n} N_k \cap R_k}$$

v. On a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{n} N_k \cap R_k\right) \underset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N_k \cap R_k) \underset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(N_k) \times \mathbb{P}(R_k)$$

(1) par additivité de $\mathbb{P}$ car la réunion est disjointe
(2) par indépendance de N_k et R_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

De plus, le rôle de Ninon et de Raphaëlle sont symétriques donc on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(N_k) = \mathbb{P}(R_k)$. En utilisant la question 4.*b*.*ii*,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Enfin, d'après la question 4.*a*,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

5. On utilise un tri à bulles

```python
import numpy as np
def tri(L) :
    n = len(L)
    for i in range(n) :
        for j in range(n-1) :
            if L[j] < L[j+1] :
                L[j], L[j+1] = L[j+1], L[j]
    return L
```

6. Montrons $(a) \implies (b)$, $(b) \implies (c)$ et $(c) \implies (a)$.

• $(a) \implies (b)$: Supposons que f est injective. Soient A et B deux parties de E. Montrons par double inclusion que $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$.
Soit $y \in f(A\cap B)$. On dispose alors de $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. Alors en particulier, $x \in A$ et $y = f(x)$ donc $y \in f(A)$. De même, $y \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$.
Réciproquement, soit $y \in f(A) \cap f(B)$. On dispose alors de $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et de $x' \in B$ tel que $y = f(x')$. Ainsi, $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, $x = x'$. On en déduit alors que $x \in A \cap B$. Comme $y = f(x)$, $y \in f(A\cap B)$.
Par double inclusion, $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$, ce qui montre (b).

• $(b) \implies (c)$: Supposons que (b) est vraie. Soient A et B deux parties de E. Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Alors, d'après (b),

$$f(A) \cup f(B) = f(A \cup B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Ce qui montre (c).

• $(c) \implies (a)$: Supposons que (c) est vraie et montrons que f est injective. Soit $(x, x') \in E^2$. Supposons que $x \neq x'$. Posons alors $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. On a donc $A \cap B = \emptyset$. D'après (c), on a alors $f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Or, $f(A) = \{f(x)\}$ et $f(B) = \{f(x')\}$ donc $f(x) \neq f(x')$. Ceci étant vrai pour tout $(x, x') \in E^2$, f est injective. Ce qui montre (a).
Ainsi, $\boxed{\text{les trois assertions sont équivalentes.}}$

7. (a)

```python
def seuil(n) :
    N = 0
    while 3**(N+1) <= n :
        N = N+1
    return(N)
```

(b) L'algorithme suivant renvoie la décomposition $(\bigstar_1)$ sous forme d'une liste $[a_N, a_{N-1}, \dots, a_0]$.

```python
def base(n) :
    L=[]
    N = seuil(n)
    while n >= 0 :
        a = 0
        while 3**N <= n :
            a = a+1
            n = n-3**N
        L.append(a)
    return L
```

Exercice 2 *D'après ESCP 2024*

1. (a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^2 - 8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 8 & 24 & 8 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I$$

$\boxed{\text{Le réel } a = -12 \text{ convient.}}$

(b) D'après la question précédente, $A \times (A - 8I) = -12I$ donc $A \times B = I$ avec $B = -\dfrac{1}{12}(A - 8I)$. On en déduit que A est inversible à droite donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$ De plus,

$$\boxed{A^{-1} = B = -\frac{1}{12}(A - 8I)}$$

2. (a) Pour tout $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 6X \iff \begin{cases} 3x + y + 2 &= 6x \\ x + 3y + 2 &= 6y \\ 2x + 2y + 8 &= 12 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + y &= -2 \\ x - 3y &= -2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\underset{(1)}{\iff} \begin{cases} -8y &= -8 \\ x - 3y &= -2 \\ 8y &= 8 \end{cases} \underset{(2)}{\iff} \begin{cases} x - 3y &= -2 \\ y &= 1 \end{cases}$$

(1) $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$
(2) Les lignes L_1 et L_2 sont les mêmes
Il vient :

$$AX = 6X \iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

La solution de l'équation $AX = 6X$ d'inconnue $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est $\boxed{X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

(b) Par calcul direct : $\boxed{A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

3. (a) Par calcul direct : $\boxed{PQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I}$

On en déduit que P est inversible à gauche donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$$

(b) Par calcul direct : $PDP^{-1} = \dfrac{1}{4}PDQ = \dfrac{1}{4}P \times \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix} = A$

(c) Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H(n) : \text{"}A^n = PD^nP^{-1}\text{"}$$

• <u>Initialisation :</u> $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$. Ce qui montre $H(0)$.
• <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$. D'après la question précédente et $H(n)$,

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.
• <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; A^n = PD^nP^{-1}}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- C_n l'événement : "Romain lit un livre de chevaux le jour n",
- P_n l'événement : "Romain lit un livre de princesses le jour n",
- D_n l'événement : "Romain lit un livre de dinosaures le jour n".

de telle sorte que $c_n = \mathbb{P}(C_n)$, $p_n = \mathbb{P}(P_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $c_n \neq 0$, $p_n \neq 0$ et $d_n \neq 0$.
Ainsi $(C_n,\ P_n,\ D_n)$ est un système complet d'événements avec $\mathbb{P}(C_n) \neq 0$, $\mathbb{P}(P_n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(D_n) \neq 0$.
D'après la formule des probabilités totales avec conditionnement :

$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n)\mathbb{P}_{P_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(C_{n+1})$$

D'après l'énoncé : $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{P_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}_{D_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{6}$. Il vient

$$\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}d_n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(C_n,\ P_n,\ D_n)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \cap P_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \cap D_n)\\
p_{n+1} &= \mathbb{P}(P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(P_{n+1} \cap P_n) + \mathbb{P}(P_{n+1} \cap D_n)\\
d_{n+1} &= \mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}(D_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(D_{n+1} \cap P_n) + \mathbb{P}(D_{n+1} \cap D_n)
\end{aligned}$$

Traitons le terme $\mathbb{P}(P_{n+1} \cap D_n)$.

- Si $d_n \neq 0$ alors par définition de la probabilité conditionnelle en utilisant l'énoncé,

$$\mathbb{P}(P_{n+1} \cap D_n) = \mathbb{P}(D_n) \times \mathbb{P}_{D_n}(P_{n+1}) = \frac{1}{6}d_n$$

- Si $d_n = 0$ alors $\mathbb{P}(D_n) = 0$. Comme $P_{n+1} \cap D_n \subset D_n$, il vient $0 \leq \mathbb{P}(P_{n+1} \cap D_n) \leq \mathbb{P}(D_n) = 0$ par croissance de la probabilité. D'où $\mathbb{P}(P_{n+1} \cap D_n) = 0 = \dfrac{1}{6}d_n$.

Dans tous les cas, $\mathbb{P}(P_{n+1} \cap D_n) = 0 = \dfrac{1}{6}d_n$. De façon similaire,

$$\mathbb{P}(C_{n+1} \cap C_n) = \frac{1}{2}c_n,\ \mathbb{P}(C_{n+1} \cap P_n) = \frac{1}{6}p_n,\ \mathbb{P}(C_{n+1} \cap D_n) = \frac{1}{6}d_n$$

$$\mathbb{P}(P_{n+1} \cap C_n) = \frac{1}{6}c_n,\ \mathbb{P}(P_{n+1} \cap P_n) = \frac{1}{2}p_n$$

$$\mathbb{P}(D_{n+1} \cap C_n) = \frac{1}{3}c_n,\ \mathbb{P}(D_{n+1} \cap P_n) = \frac{1}{3}p_n,\ \mathbb{P}(D_{n+1} \cap D_n) = \frac{2}{3}d_n$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}d_n\\
p_{n+1} &= \frac{1}{6}c_n + \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}d_n\\
d_{n+1} &= \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}d_n
\end{aligned}$$

On reconnaît

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/2 & 1/6\\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} X_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} X_n = \frac{1}{6}AX_n$$

(c) Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H(n) : \text{"}X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1\text{"}$$

- <u>Initialisation :</u> On a

$$\frac{1}{6^{1-1}}A^{1-1}X_1 = \frac{1}{1}IX_1 = X_1$$

Ce qui montre $H(1)$.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$. D'après la question précédente et $H(n)$,

$$X_{n+1} = \frac{1}{6}AX_n = \left(\frac{1}{6}A\right) \times \left(\frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1\right) = \frac{1}{6^n}A^nX_1$$

Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.
• <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1}$$

(*d*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et la question 3.*c*,

$$X_n = \frac{1}{6^{n-1}} A^{n-1} X_1 = \frac{1}{6^{n-1}} P D^{n-1} P^{-1} X_1$$

Or $d_n = [X_n]_{3,1}$ et $X_1 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} d_n &= \left[\frac{1}{6^{n-1}} P D^{n-1} P^{-1} X_1\right]_{3,1} = \frac{1}{6^{n-1}} [P D^{n-1} P^{-1} X_1]_{3,1} \\ &= \frac{1}{6^{n-1}} \sum_{k=1}^{3} [P D^{n-1} P^{-1}]_{3,k} [X_1]_{k,1} = \frac{1}{6^{n-1}} [P D^{n-1} P^{-1}]_{3,3} \end{aligned}$$

Comme D est une matrice diagonale, $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 6^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Il vient alors $PD^{n-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 2 \times 6^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \end{pmatrix}$ puis $PD^{n-1}P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 2(6^{n-1} + 2^{n-1}) \end{pmatrix}$

Finalement,

$$\boxed{d_n = \frac{1}{6^{n-1}} \times \frac{2}{4}(6^{n-1} + 2^{n-1}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)}$$

Comme $|\frac{1}{3}| < 1$, $\frac{1}{3^{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et par somme puis produit de limites, $\boxed{d_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}}$

<u>Exercice 3</u> *D'après EM Lyon 2025*

1. (*a*) Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H(n) : \text{"} u_n > 0 \text{"}$$

• <u>Initialisation :</u> On a $u_0 = 1 > 0$. Ce qui montre $H(1)$.
• <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$. D'après $H(n)$, $u_n > 0$ et par stricte positivité de l'exponentielle, on a $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n} > 0$. Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.
• <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$$

(*b*) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n > 0$ donc $1/u_n > 0$. Alors, par stricte croissance de l'exponentielle, $e^{1/u_n} > e^0 = 1$. Il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1/u_n} > 1$$

Par stricte positivité de u_n, on obtient : $u_{n+1} > u_n$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement croissante.}}$

(*c*) Supposons par l'absurde que la suite u est majorée. Comme elle est de plus croissante, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. Or, par croissance de u, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 = 1$$

Par préservation des inégalités larges par passage à la limite : $\ell \geq 1$. Notons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$$

D'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

D'autre part, par inverse $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$, puis par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{1/u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/\ell}$. Enfin, par produit, $u_n e^{1/u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell e^{1/\ell}$

Par unicité de la limite : $\ell = \ell e^{1/\ell}$. Comme $\ell \geq 1 > 0$, en divisant par ℓ, on a $\mathrm{e}^{1/\ell} = 1$. En composant par la fonction ln, on obtient $\dfrac{1}{\ell} = 0$. C'est absurde.

On en déduit que la suite u n'est pas majorée. Comme elle est croissante, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

2.

```python
import numpy as np
u = 1
n = 0
while u < 10**6 :
    u = u*np.exp(1/u)
    n = n+1
print(n)
```

3.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def u(n) :
    u = 1
    L=[1]
    for i in range(1,n+1) :
        u = u*np.exp(1/u)
        L.append(u)
    return L
liste_x = range(50)
liste_y = u(49)
plt.plot(liste_x, liste_y, '+')
plt.show()
```

4. <u>En $+\infty$:</u> On a $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc par continuité de la fonction exponentielle $e^{1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$.
Par produit, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$
<u>En 0 :</u> On remarque que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1/x}$$

Or, $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$ et par croissance comparée $\dfrac{e^X}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, par composition, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to0]{} +\infty}$

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée et produit de fonctions qui le sont.
Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = e^{1/x} + x \times \left(-\frac{1}{x^2} e^{1/x}\right) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x}$$

et alors, par stricte positivité de la fonction exponentielle,

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \iff 1 \geq \frac{1}{x} \iff x \geq 1$$

En remplaçant les inégalités larges par des égalités dans les équivalences, on obtient le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

6. On utilise la dichotomie en remarquant que $f(1) = e < 3$ et $f(3) = 3e^{1/3} > 3$

```python
import numpy as np
def g(x) :
    return x*np.exp(1/x) - 3
a,b = 1,3
p = 10**(-4)
while b-a > p :
    m = (a+b)/2
    if g(m)*g(a) < 0 :
        b = m
    else :
        a = m
print((a+b)/2)
```

7. (a) Par convexité de la fonction exponentielle :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ e^X \geq 1 + X$$

Soit $x > 0$. En appliquant cette inégalité à $X = \dfrac{1}{x}$, on a $e^{1/x} \geq 1 + \dfrac{1}{x}$ et alors $xe^{1/x} \geq x + 1$. D'où

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) \geq x + 1}$$

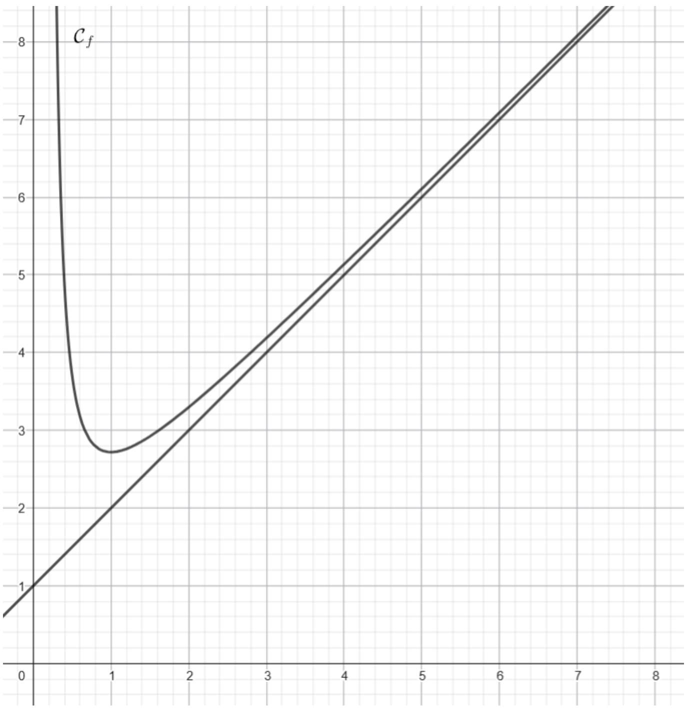
(b) L'inégalité ($\bigstar_2$) donne :

$$\forall x \geq 1,\ \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$$

Or, $\dfrac{1}{2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\dfrac{e}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{f(x) - (x+1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

8. D'après les questions précédentes, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x + 1$.



9. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a montré à la question 1.b que
$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{1/u_k} > 0$$
En composant par ln, on a
$$\boxed{\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :
$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
On reconnaît une somme télescopique. Après l'hécatombe,
$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
Et comme $u_0 = 1$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

11. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la suite u : $\forall k \geq 0$, $u_k \geq u_0 = 1$.
En appliquant l'inégalité ($\bigstar_2$) à $x = u_k$,
$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k}$$
Par définition, on a $u_{k+1} = f(u_k)$,
$$\boxed{1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 0 de $n-1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{u_k}\right)$$
Par linéarité de la somme et en reconnaissant une somme télescopique :
$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - u_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
On reconnaît deux sommes constantes et comme $u_0 = 1$:
$$\boxed{n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}$$
Puis en utilisant la question 10,
$$\boxed{1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n)}$$

12. D'après la question 4, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. De plus, par croissance comparée, $\dfrac{\ln X}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0$.
Ainsi, par composition, $\boxed{\dfrac{\ln(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on divise par $u_n > 0$ dans l'inégalité de la question 11.b,
$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n}$$

c'est-à-dire

$$1-\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n}\right)\geq \frac{n}{u_n}\geq 1-\left(\frac{1}{u_n}+e\frac{\ln(u_n)}{u_n}\right)$$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, d'après la question précédente, $\dfrac{\ln(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit :

$$1-\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 1-\left(\frac{1}{u_n}+e\frac{\ln(u_n)}{u_n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{u_n}=1}$$