

# Chapitre 15 : Séries numériques

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

## Table des matières

<b>I. Généralités sur les séries numériques</b>	<b>2</b>
1. Série numérique . . . . .	2
2. Nature d'une série . . . . .	2
3. Liens entre suites et séries . . . . .	4
4. Combinaison linéaire de séries convergentes . . . . .	5
5. Changement de variable . . . . .	6
<b>II. Séries classiques</b>	<b>7</b>
1. Série géométrique . . . . .	7
2. Série géométrique dérivée d'ordre 1 ou 2 . . . . .	7
3. Série de Riemann . . . . .	8
4. Série exponentielle . . . . .	9
5. Une technique classique pour les séries alternées (HP en théorie, pas en pratique) . . . . .	9
<b>III. Séries à termes positifs et convergence absolue</b>	<b>10</b>
1. Propriétés des séries à terme positif . . . . .	10
2. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs . . . . .	10
3. Convergence absolue de séries . . . . .	11

L'idée est de formaliser la notion de somme infinie. On utilise la notion de limite pour donner un sens à des égalités (HP) comme :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

ou montrer que certaines sommes infinies ne sont pas bien définies. Par exemple, la fameuse série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  tend vers  $+\infty$ , et la somme

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$$

n'a pas de limite du tout (à chaque ajout d'un terme, la valeur de la somme échange sa valeur entre 0 et 1, et la somme ne se stabilise donc pas vers une valeur finie).

## I. Généralités sur les séries numériques

### 1. Série numérique

**Définition 1.** Soit  $n_0$  un entier naturel et  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle.

On appelle **série de terme général**  $u_k$ , et on note  $\sum_{k \geq n_0} u_k$ , la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  définie par :

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Pour tout entier  $n \geq n_0$ , le réel  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$  est appelé **la somme partielle d'indice**  $n$  de la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$ .

**Remarque.** (i) La série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  est donc une suite, la suite de ses sommes partielles. Par exemple,

la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ , appelée la **série harmonique**, est la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  où pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $S_n$  est le réel :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Par exemple,  $S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ , et  $S_{100} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100}$  vaut environ 5,18.

(ii) Dans la notation  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  introduite ci-dessus,  $k$  est une variable muette (ou locale). Cette notation est donc bien définie si et seulement si  $k$  n'est pas déjà fixé, et dans ce cas elle a le même sens que  $\sum_{l \geq n_0} u_l$  (si  $l$  n'est pas non plus déjà fixé).

(iii) On trouve parfois la notation  $\sum_k u_k$  ou  $\sum u_k$  pour désigner  $\sum_{k \geq n_0} u_k$ , à condition que le rang du premier terme de la suite  $u$  soit clair.

**Exemple 2.** À noter.

### 2. Nature d'une série

Étudier la nature d'une série, c'est déterminer si c'est une série convergente ou divergente, selon la définition ci-dessous.

**Définition 3.** Soit  $n_0$  un entier naturel et  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle. Notons  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de  $\sum_{k \geq n_0} u_k$ , pour tout entier  $n \geq n_0$ .

(i) On dit que la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  **converge** si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  converge. Autrement dit,  $\sum_{k \geq n_0} u_k$

converge si et seulement si la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$  existe et est finie.

Dans ce cas, on appelle **somme de la série**  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  le réel noté  $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$  donné par :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

(ii) On dit que la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  **diverge** si elle ne converge pas.

**Remarque.** La définition de " $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge" n'en est pas vraiment une (c'est une suite !).

**Exemple 4.** À noter.

**Exercice 5.** (i) Démontrer que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ .

(ii) En déduire que  $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

(iii) En déduire que la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

**Remarque.** La technique employée ici (utiliser une comparaison pour étudier la nature d'une série) est très commune, et fait l'objet d'un théorème en partie III.

**Remarque.** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle (où  $n_0 \in \mathbb{N}$ ). Vous devez faire particulièrement **attention** à la terminologie, et à ne pas confondre les différents objets intervenants dans ce chapitre.

- $\sum_{n \geq n_0} u_n$  désigne la série de terme général  $u_n$ . C'est une **suite**.

- Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sum_{k=n_0}^n u_k$  est un **réel** (défini avant ce chapitre), appelé la  $n$ -ième somme partielle de la série de terme général  $u_k$ . Notons cette  $n$ -ième somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n.$$

En tant que suite,  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  est la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$ .

- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  n'est pas toujours défini. Cette notation est définie si et seulement si la série de

terme général  $u_n$  converge. Dans ce cas,  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  est un **réel**, appelé somme de la série de terme général  $u_n$ , qui est la limite de la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$ .

**Remarque.** En particulier, envisager l'objet  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  avant d'avoir démontré que la série de terme général  $u_n$  converge est une faute.

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, et on dispose d'une relation de Chasles.

**Proposition 6.** Soit  $n_0$  un entier naturel,  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle et  $n_1 > n_0$  un entier.

Alors, la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge si et seulement si la série  $\sum_{k \geq n_1} u_k$  converge, et dans ce cas :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k + \sum_{k=n_1}^{+\infty} u_k.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

### 3. Liens entre suites et séries

**Remarque.** Formellement, une série est une suite donc le lien est immédiat. Mais on dispose de passages intéressants d'une notion à l'autre. Commençons par une remarque.

**Proposition 7.** Soit  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle (où  $n_0$  est un entier naturel).

Notons, pour tout entier  $n$ ,  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$ .

Alors :

$$\forall n \geq n_0 + 1, u_n = S_n - S_{n-1}.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 8.** Dessin à noter.

**Remarque.** Voici une conséquence pratique, fournissant une manière de démontrer qu'une série diverge dans des cas simples.

**Proposition 9. (et définition.)** Soit  $n_0$  un entier naturel et  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle.

Si  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge, alors  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ .

Par contraposition, si  $(u_k)$  ne tend pas vers 0, alors la série de terme général  $u_k$  diverge. Dans ce cas, on dit que la série de terme général  $u_k$  **diverge grossièrement**.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque. Attention, la réciproque de cette proposition est fausse** et c'est une erreur très courante. Par exemple, la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge alors que son terme général  $\frac{1}{n}$  tend vers 0.

Il est faux de dire qu'une série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  série converge "car  $u_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ ".

**Exemple 10.** La suite  $(n)_{n \geq 0}$  ne tend pas vers 0. Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} n$  diverge grossièrement.

**Exemple 11.** Que dire des séries  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k$  et  $\sum_{k \geq 1} 1 - \frac{1}{k}$  ?

D'un autre point de vue, si l'on étudie la convergence d'une suite  $(u_n)_n$ , on peut considérer la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$ .

**Définition 12.** Soit  $n_0$  un entier naturel et  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle.

On dit que la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  est **télescopique** s'il existe une suite réelle  $(a_k)_{k \geq n_0}$  telle que pour tout  $k \geq n_0$ ,  $u_k = a_{k+1} - a_k$ . Autrement dit,

$$\sum_{k \geq n_0} u_k = \sum_{k \geq n_0} a_{k+1} - a_k.$$

**Proposition 13.** Soient  $n_0$  un entier et  $(a_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle.

Alors, la série télescopique  $\sum_{k \geq n_0} a_{k+1} - a_k$  converge si et seulement si la suite  $(a_k)_{k \geq n_0}$  converge.

**Exemple 14.** Dessin à noter.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** On devra systématiquement reprendre ce raisonnement qui permet, au passage, d'avoir une égalité reliant la somme de la série  $\sum_k a_{k+1} - a_k$  et la limite de la suite  $(a_k)$ .

**Exemple 15.** Démontrer que  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$  converge.

#### 4. Combinaison linéaire de séries convergentes

**Proposition 16.** Soit  $n_0$  un entier, et  $(u_k)_{k \geq n_0}$  et  $(v_k)_{k \geq n_0}$  deux suites réelles.

Si  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  et  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  convergent, alors :

(i) Pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , la série  $\sum_{k \geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$  converge, et

$$(ii) \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** En particulier, cet énoncé montre que :

(i) Si la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge, alors la série  $\sum_{k \geq n_0} \lambda u_k$  converge pour tout réel  $\lambda$ , et

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$$

(ii) Si les séries  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  et  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  convergent, alors la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k + v_k$  converge, et

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + v_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \sum_{k \geq n_0} v_k$$

**Remarque.** Quand on utilise ce résultat, on dit qu'on utilise la propriété de linéarité de la sommation (on dit que la série  $\sum_{k \geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$  est une combinaison linéaire des séries  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  et  $\sum_{k \geq n_0} v_k$ ).

**Exemple 17.** Montrons que  $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} - 4 \cdot 3^{-n}$  converge, et calculons sa somme.

**Remarque.** Attention à ne pas utiliser la linéarité quand vous n'avez pas le droit. Par exemple,

(i) On a démontré dans un exercice précédent que  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$  converge.

(ii) On a  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , mais

(iii) On ne peut pas écrire  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$  car  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1}$  et  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$  ne sont pas définis (les séries concernées divergent).

**Remarque.** Des réciproques partielles de ce résultat existent mais présentent certaines subtilités. Il faudra refaire le raisonnement de l'exercice suivant pour s'en servir.

**Exercice 18.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles définies à partir d'un rang  $n_0$ .

(i) Montrer que si  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge et  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  diverge, alors  $\sum_{k \geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$  diverge pour tous réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\mu \neq 0$ . Que dire si  $\mu = 0$ ?

(ii) Montrer que si  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge et  $\sum_{k \geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$  diverge pour certains réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\mu \neq 0$ , alors  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  diverge. Que dire si  $\mu = 0$ ?

(iii) Si les séries  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  et  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  divergent, que dire de la série  $\sum_{k \geq n_0} \lambda u_k + \mu v_k$  ?

## 5. Changement de variable

**Proposition 19.** Soit  $n_0$  un entier naturel et  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle.

Pour tout entier relatif  $l$  tel que  $l \leq n_0$ , il est équivalent de dire :

(i)  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge, et

(ii)  $\sum_{k \geq n_0-l} u_{k+l}$  converge

De plus, dans ce cas :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0-l}^{+\infty} u_{k+l}.$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** Dans la démonstration, on a utilisé la proposition suivante : pour toute suite réelle  $(S_n)_{n \geq n_0}$ , pour tout entier relatif  $l$ , les suites  $(S_n)_{n \geq n_0}$  et  $(S_{n+l})_{n \geq n_0-l}$  ont la même nature, et même limite si elles admettent une limite. On utilise souvent cette proposition lorsqu'on étudie des suites récurrentes, pour affirmer que " $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ " (avec  $l = 1$ ).

**Remarque.** Cette proposition est la formule de changement de variable pour les séries. La contrainte  $l \leq n_0$  ne sert qu'à garantir que les sommes partielles considérées par ces séries sont indexées par des entiers naturels, et pourrait être retirée.

**Exemple 20.** Que dire de  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k-1}$  ? De  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}}$  ?

## II. Séries classiques

On dispose de quelques séries de référence, dont on connaît bien la nature et la valeur de l'éventuelle somme, qui nous servent à traiter les séries rencontrées dans nos problèmes.

### 1. Série géométrique

**Proposition 21. (et définition.)** Soit  $q$  un réel. Alors :

(i) Si  $q \in ]-1, 1[$ , alors  $\sum_{k \geq 0} q^k$  converge et  $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ .

(ii) Sinon,  $\sum_{k \geq 0} q^k$  diverge.

La série  $\sum_{k \geq 0} q^k$  est appelée la série géométrique de raison  $q$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** La convergence d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, on peut invoquer ce résultat pour caractériser la convergence d'une série de la forme  $\sum_{k \geq n_0} q^k$  où  $q \in \mathbb{R}$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 22.** Soit  $q \in ]-1, 1[$  et soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Alors, la série  $\sum_{k \geq n_0} q^k$  converge et  $\sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q}$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 23.** Déterminons la nature et la valeur de l'éventuelle somme des séries suivantes.

$$(i) \sum_{k \geq 0} 2 \times 5^{-k} \quad (ii) \sum_{k \geq 0} 3 \times 2^k \quad (iii) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{3^k}.$$

**Exercice 24.** Déterminer la nature et la valeur de l'éventuelle somme de  $\sum_{n \geq 0} e^{-\alpha n}$  en fonction du réel  $\alpha$ .

### 2. Série géométrique dérivée d'ordre 1 ou 2

**Proposition 25. (et définition.)** Soit  $q$  un réel. Alors :

(i) Si  $q \in ]-1, 1[$ , alors  $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$  converge et  $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ .

(ii) Sinon,  $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$  diverge.

On dit que  $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$  est la série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison  $q$ .

**Proposition 26. (et définition.)** Soit  $q$  un réel. Alors :

(i) Si  $q \in ]-1, 1[$ , alors  $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$  converge et  $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ .

(ii) Sinon,  $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$  diverge.

On dit que  $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$  est la série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison  $q$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 27.** Déterminons la nature et la valeur de l'éventuelle somme des séries suivantes.

$$(i) \sum_{k \geq 0} k \times 5^{1-k}$$

$$(ii) \sum_{k \geq 0} k \times 2^k$$

$$(iii) \sum_{k \geq 1} k(k-1) \frac{1}{3^k}$$

**Exercice 28.** Soit  $p \in ]-1, 1[$ . Déterminer la nature et l'éventuelle somme de  $\sum_{k \geq 0} k^2 p^k$ . On utilisera que pour tout entier  $k$ ,  $k^2 = k + k(k-1)$ .

### 3. Série de Riemann

Voici le critère de convergence des séries de Riemann.

**Proposition 29. (et définition.)** Soit  $\alpha$  un réel. Alors, la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

La série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$  est appelée la **série de Riemann de paramètre  $\alpha$** .

**Démonstration.** Cas  $\alpha \leq 1$  à noter. Cas  $\alpha > 1$  admis, nous verrons une démonstration très intéressante dans le chapitre sur les intégrales.  $\square$

**Exemple 30.** La séries harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge en tant que série de Riemann de paramètre  $1 \leq 1$ .

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge comme série de Riemann de paramètre  $2 > 1$ .

**Remarque.** Cet énoncé ne dit rien sur la valeur de la somme des séries de Riemann convergentes ! Et elles sont compliquées. Comme dit dans l'introduction, un résultat bien hors programme est :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exemple 31.** Que dire de la nature...

$$(i) \text{ de } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} ?$$

$$(ii) \text{ de } \sum_{n \geq 1} 2^n + \frac{1}{n\sqrt{n}} ?$$

$$(iii) \text{ de } \sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n^2} ?$$

#### 4. Série exponentielle

Voici le résultat relatif aux séries dites "exponentielles".

**Proposition 32. (et définition.)** Pour tout réel  $x$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$  converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

La série  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$  est appelée la **série exponentielle de paramètre  $x$** .

**Démonstration.** Admis.  $\square$

**Exemple 33.** Que dire de  $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n + n2^n}{n!}$  ?

**Exercice 34.** Déterminer la nature et l'éventuel somme de  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^{k+1}}{(k-1)!}$ .

#### 5. Une technique classique pour les séries alternées (HP en théorie, pas en pratique)

**Remarque.** On dit qu'une série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est alternée si  $(u_n)_n$  change de signe à chaque nouveau terme :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leq 0$ .

Dans ce cas, on peut démontrer (HP) que si  $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et si  $(|u_n|)_n$  est décroissante, alors la série

$$\sum_{n \geq n_0} u_n$$

Par exemple, c'est le cas de  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ , car  $|\frac{(-1)^k}{k}| = \frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ ,  $(\frac{1}{k})_k$  est décroissante, et  $(\frac{(-1)^k}{k})_k$  change bien de signe à chaque terme.

$$\text{Autres exemples : } \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}, \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

En pratique, on suivra la méthode ci-dessous en présence de séries de la forme  $\sum_{k \geq n_0} (-1)^k u_k$  où  $(u_k)_k$  est une suite décroissante qui tend vers 0.

**Exemple 35. Méthode :** Pour redémontrer qu'une série alternée converge, selon les conditions ci-dessus, on utilise le théorème des suites adjacentes selon les étapes suivantes.

- Soit  $(u_n)_n$  une suite telle que  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  est alternée, et telle que  $(|u_n|)_n$  converge vers 0 en étant décroissante. Notons, pour tout entier  $n$ ,  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de cette série.
- On montre que  $(S_{2n})_n$  et  $(S_{2n+1})_n$  sont monotones, de monotonie opposée.
- $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc ces suites sont adjacentes.
- Par le théorème des suites adjacentes,  $(S_{2n})_n$  et  $(S_{2n+1})_n$  convergent vers la même limite.
- Par le théorème relatif aux sous suites de rangs pairs et impairs,  $(S_n)_n$  converge vers cette limite commune.
- Par définition, la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge.

**Exemple 36.** Montrons que  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge.

### III. Séries à termes positifs et convergence absolue

Si  $u_n$  est positif pour tout entier  $n$ , alors l'étude de la série de terme général  $u_n$  s'en retrouve simplifiée, et on dispose de théorèmes propres à cette situation.

#### 1. Propriétés des séries à terme positif

**Définition 37.** Soit  $(u_k)_{k \geq n_0}$  une suite réelle (où  $n_0 \in \mathbb{N}$ ).

On dit que la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  est à termes positifs si  $u_k$  est positif pour tout entier  $k \geq n_0$ .

**Proposition 38.** Soit  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  une série à termes positifs. Notons, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $S_n$  sa somme partielle d'indice  $n$ . Alors, il est équivalent de dire :

(i)  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge, et

(ii) la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est majorée

Dans ce cas :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{k=n_0}^n u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

**Remarque.** L'idée est très simple : la suite  $(S_n)_n$  est croissante, donc on peut appliquer le théorème de la limite monotone.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

#### 2. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs

Voici le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

**Théorème 39.** Soit  $n_0$  un entier naturel.

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors :

(i) Si  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  converge, alors  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge et  $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$ .

(ii) Si  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  diverge, alors  $\sum_{k \geq n_0} v_k$  diverge.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 40.** (i) Montrer que  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ .

(ii) Sans utiliser le critère de convergence des séries de Riemann, montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge.

**Exercice 41.** (i) Montrons que  $\forall k \geq 0, \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$ .

(ii) En déduire la nature de  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{e^k + e^{-k}}$ .

**Exemple 42.** Montrons que  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$  converge.

**Exemple 43.** Montrons que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$  diverge.

### 3. Convergence absolue de séries

**Définition 44.** On dit que la série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge absolument si la série  $\sum_{k \geq n_0} |u_k|$  converge.

**Proposition 45.** Si une série converge absolument, alors elle converge.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.**

- La réciproque est fausse. Par exemple, si on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  pour tout entier  $n \geq 1$ , la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge (c'est une série alternée pour laquelle la méthode précédente s'applique), mais  $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente (série de Riemann de paramètre  $1 \leq 1$ ), donc  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge mais ne converge pas absolument.
- Ainsi, pour démontrer qu'une série  $\sum_{k \geq n_0} u_k$  converge, on peut essayer de démontrer que  $\sum_{k \geq n_0} |u_k|$  converge et utiliser les théorèmes relatifs aux séries à termes positifs.

**Exemple 46.** Que dire de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$  ?