Programme de colle n^o 18 : Théorie des graphes et séries numériques

*Semaine du lundi **9 février**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Théorie des graphes

18.1 Chapitre complet : se reporter au programme de colle précédent

18.2 Notion de graphes bipartis. Notion de sous-graphe, de sous-graphe induit et de composante connexe.

La notion de composante connexe est HP : les exercices qui en ont besoin doivent la redéfinir

18.3 Un problème sur les graphes sans triangle (théorème de Mantel)

Annexe. Sujet corrigé à faire en autonomie.

Généralités sur les séries numériques

18.4 Notion de série de terme général u_k, notation $\sum_{k \geq n_0} u_k$. Somme partielle d'indice n d'une série. Nature d'une série : séries convergentes, séries divergentes. Somme d'une série convergente. Divergence de la série harmonique (exercice 5). "La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes" et relation de Chasles (prop. 6).

18.5 Lien entre suites et séries I : Si on note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_k u_k$, alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout n convenable. Conséquence : si la série $\sum_k u_k$ converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Contraposée et notion de divergence grossière d'une série. Attention, la réciproque est fausse : il ne suffit pas que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour que $\sum_k u_k$ converge (exemple de la série harmonique).

18.6 Lien entre suite et séries II : notion de série télescopique, convergence des séries télescopiques. Pour appliquer les méthodes liées aux séries télescopiques, on reviendra aux sommes partielles qui sont des sommes télescopiques.

18.7 Combinaisons linéaires de séries convergentes.

18.8 Changement de variable pour les séries.

Les élèves peuvent revenir aux sommes partielles pour mettre en œuvre des changements de variables, et sont encouragés à le faire en cas de difficultés.

18.9 Séries géométriques, séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, critères de convergence.

Python

18.10 Fin du TP sur les matrices.

Commandes `np.dot, np.transpose, al.matrix_power, al.inv`. Construction du triangle de Pascal.

Quelques questions de cours

1. Théorie des graphes : voir le programme de la semaine dernière.
2. Définir la notion de graphe complet. On note K_n le graphe complet d'ordre n dont les sommets sont les entiers de 1 à n. Donner la matrice d'adjacence M de K_n (pour la numérotation naturelle de ces sommets) et calculer M^p pour tout entier naturel p.
3. Définir le vocabulaire général des séries : la notion de série, de somme partielle d'indice n d'une série, de série convergente, divergente, et la notion de somme d'une série convergente. Illustrer toutes ces notions sur une série de votre choix. Montrer, sans utiliser le moindre théorème lié aux séries, que $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^k}$ converge et calculer sa somme.
4. Définir la série harmonique et montrer qu'elle diverge.
5. Énoncer et démontrer la proposition (6) stipulant que la nature d'une série "ne dépend pas de ses premiers termes" et donnant la relation de Chasles.
6. Énoncer et démontrer la proposition et définition dans laquelle la notion de divergence grossière d'une série est définie. Montrer que la réciproque de l'implication donnée par celle-ci est fausse.
7. Énoncer et démontrer la proposition relative aux séries combinaisons linéaires de séries convergentes.

8. Définir la notion de série géométrique. Énoncer et démontrer le critère de convergence pour les séries géométriques.
9. Définir les notions de séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2, et énoncer les critères de convergence pour ces séries. Démontrer le critère concernant les séries géométriques dérivées d'ordre 1.
10. Écrire le code d'une fonction `Pascal` prenant en entrée un entier n et renvoyant une matrice représentant le triangle de Pascal jusqu'à la ligne n.