TD de mathématiques n°15 : Séries numériques

Pour commencer

Études de séries numériques

Exercice 1 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer, si possible, la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$:

- (a) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$
- (b) $u_n = \frac{2n+1}{2^{2n+1}}$
- (c) $u_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$
- (d) $u_n = \frac{(n-1)3^{n-1}}{5^n}$
- (e) $u_n = \frac{(2-n)(-1)^n}{3^{n+1}}$
- (f) $u_n = \frac{n}{n!}$
- (g) $u_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$
- (h) $u_n = \frac{1+2^{n+1}}{n!}$
- (i) $u_n = \frac{n^2}{n!}$

Exercice 2 Calculer, en justifiant la convergence, les valeurs de :

- (a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^k + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^k$
- (b) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$
- (c) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{9}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{4}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\right)$

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 6, u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, 6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Exercice 4 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 2}$.

- (a) $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$
- (b) $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$
- (c) $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
- (d) $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 5 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{k+2}$.
En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ et $v_n = \frac{(-1)^n n}{4n^2-1}$.

- (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.
- (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.
- (c) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.
- (d) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Études de séries à paramètres

Exercice 7 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} (\ln(x))^n$.

Exercice 8 Soit $p \in]0,1[$. Calculer, en justifiant la convergence, les valeurs de :

- (a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}$
- (b) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}$
- (c) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2p(1-p)^{k-1}$

Exercice 9 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer, en justifiant la convergence, les valeurs de :

- (a) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{ak+b}{k!}$
- (b) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{ak^2+bk+c}{k!}$

Exercice 10 Soit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer, en justifiant la convergence, la valeur de

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{k-n}$$

Théorème de comparaison

Exercice 11 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la nature de la série de terme général $(u_n)_{n\geq 2}$.

(a) $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

(b) $u_n = \frac{\ln n}{n}$

(c) $u_n = \frac{1}{e^n+e^{-n}}$

(d) $u_n = \frac{1}{n^2+n}$

(e) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

(f) $u_n = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}+1}$

(g) $u_n = \frac{1}{\ln n}$

(h) $u_n = \frac{1}{2^n+1}$

(i) $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

Exercice 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 13 Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$.
Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Approfondissements

Exercice 14 On rappelle que l'on sait que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$.

(b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 15 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $v_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$.

(b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n - v_n)$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (u_k - v_k)$.

(c) En déduire que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ convergent et déterminer les valeurs de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Exercice 16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$.

(a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n u_n$ converge.

(c) Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergent.

Exercice 17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(a) On suppose que $\ell > 1$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

(b) On suppose que $\ell < 1$.

(i) Montrer qu'il existe $q \in [0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

(ii) En déduire que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0} q^{n-n_0}$, puis que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

(c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}$ converge et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.

Pour continuer

Études de séries numériques

Exercice 18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2, u_2 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n!}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k!}$.

Exercice 19 Calculer, en justifiant la convergence, les valeurs de $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-k}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k}$ et $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

Exercice 20 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.

En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Études de séries à paramètres

Exercice 21 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$.

Exercice 22 Soit $q \in]-1, 1[$ et $p = 1 - q$. Calculer, en justifiant la convergence, les valeurs de :

(a) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1} + qp^{k-1}$

(b) $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k\left(pq^{k-1} + qp^{k-1}\right)$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\left(p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}\right)$

Exercice 23 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+p)}$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+p)}$.

Théorème de comparaison

Exercice 24 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, $\frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))$.

En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 25 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (e^{u_n} - 1)$ ont même nature.

Exercice 26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.

Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1 + u_n)$ ont même nature.

Approfondissements

Exercice 27 Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(r) = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} r+k \\ r \end{pmatrix} x^k$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression explicite de $S_n(0)$, puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n(0)$.

(b) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-x)S_n(r) = S_n(r-1) - \begin{pmatrix} r+n \\ r \end{pmatrix} x^{n+1}$.

(c) Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} r+n \\ r \end{pmatrix} x^{n+1}$.

(d) En déduire par récurrence que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

(e) En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r-1)\dots(k+1)x^k = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$.

Exercice 28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, u_k = (1 - S_{k-1}) - (1 - S_k)$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = -n (1 - S_n) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (1 - S_k)$.

(c) On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 1} n u_n$ converge et on note $T = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k u_k$.

- (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n (1 - S_n) \leq T - T_n$ et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} n (1 - S_n) = 0$.
- (ii) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (1 - S_n)$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (1 - S_k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k u_k$.

(d) On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (1 - S_n)$ converge.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} n u_n$ converge et en déduire que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (1 - S_k)$.

Exercice 29 On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et en déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln (u_n)$.

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n.
- (ii) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 30 On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$ et déterminer le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n)^2$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (u_k)^2$ en fonction de u_0.

(d) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 31 On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln\left(1 + (u_n)^2\right)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est correctement défini et $u_n \in]0, 1]$.

(b)
- (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq (u_n)^2$.
- (ii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq (\ln(2))^n$.
- (iii) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 32 On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 - u_n + 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n.
- (ii) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge et déterminer la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$ en fonction de u_0.