Correction du DM n°4

Partie I

1. Il faut juste écrire les matrices.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. La matrice M_a est carrée de taille 2 donc est inversible si et seulement si son déterminant $(1-a)^2 - a^2 = 1-2a$ est non nul. Or, $1-2a = 0 \iff a = \frac{1}{2}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } M_a \text{ est inversible ssi } a \neq \frac{1}{2}.}$

3. *On peut trouver α et β au brouillon et justifier :*

$$a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + (1-2a)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & a\\ a & a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-2a & 0\\ 0 & 1-2a\end{pmatrix} = M_a$$

   Donc :

   $\boxed{M_a = aJ + (1-2a)I_2}$

4. En posant le produit matriciel, on trouve $J^2 = 2J$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J^{n+1} = J^2 J^{n-1} = 2JJ^{n-1} = 2J^n.$$

   On rédige alors une récurrence pour montrer : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 2^{n-1}J}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et α, β deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}2^{k-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(2\alpha)^k\beta^{n-k}\\ &= \frac{1}{2}\left((\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2\alpha)^k\beta^{n-k}) - \beta^n\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((2\alpha+\beta)^n - \beta^n\right)\end{aligned}$$

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\alpha = a$ et $\beta = 1-2a$ de sorte que

$$M_a = \alpha J + \beta I_2.$$

   Alors, αJ et βI_2 commutent car βI_2 est une matrice d'homothétie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}M_a^n &= (\alpha_J + \beta I_2)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha J)^k(\beta I_2)^{n-k} && \text{par le binôme de Newton}\\ &= \beta^n I_2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}J^kI_2^{n-k}\\ &= \beta^n I_2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}2^{k-1}J && \text{car } \forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 2^{k-1}J\\ &= \beta^n I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}2^{k-1}\right)J\\ &= \beta^n I_2 + \frac{1}{2}\left((2\alpha+\beta)^n - \beta^n\right)J && \text{d'après la question précédente}\\ &= (1-2a)^n I_2 + \frac{1}{2}\left(1-(1-2a)^n\right)J && \text{par définition de } \alpha, \beta\end{aligned}$$

   On a bien montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, M_a^n = (1-2a)^n I_2 + \frac{1}{2}\left(1-(1-2a)^n\right) J.}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M_a^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(1-2a)^n}{2} & \dfrac{1-(1-2a)^n}{2} \\ \dfrac{1-(1-2a)^n}{2} & \dfrac{1+(1-2a)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

7. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'événement “l'interrupteur est allumé au bout de n minutes. Posons $B_n = \bar{A}_n$. Alors, B_n est l'événement “l'interrupteur est éteint au bout de n minutes”.

   (a) Pour tout entier naturel n, $b_n = 1 - a_n = 1 - \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bar{A}_n) = \mathbb{P}(B_n)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B_n) \neq 0$, alors la formule des probabilités totales appliquée au SCE (A_n, B_n) donne :

   $$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = a_n(1-a) + b_n a$$

   On remarque que cette égalité est aussi vraie si $\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B_n) = 0$ car si par exemple $\mathbb{P}(B_n) = 0$, alors l'interrupteur est allumé à l'étape n avec probabilité 1, donc est allumé (attention, ceci deviendra faux dans quelques chapitres, pour des expériences aléatoires plus compliquées), donc $\mathbb{P}(A_{n+1}) = 1 - a = 1 \times (1-a) = a_n(1-a)$.

   On procède de la même manière pour montrer :

   $$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = a_n a + b_n(1-a)$$

   Finalement, les deux égalités obtenues

   $$a_{n+1} = a_n(1-a) + b_n a \text{ et } b_{n+1} = a_n a + b_n(1-a)$$

   sont équivalentes à l'égalité matricielle

   $$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

   ce qui montre bien :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = M_a X_n.$$

   (c) A l'aide de la question précédente, on rédige une récurrence pour démontrer :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M_a^n X_0.$$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

   $$X_n = M_a^n X_0.$$

   D'après l'énoncé, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'après la question 6 :

   $$M_a^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(1-2a)^n}{2} & \dfrac{1-(1-2a)^n}{2} \\ \dfrac{1-(1-2a)^n}{2} & \dfrac{1+(1-2a)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

   Donc en posant le produit matriciel :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(1-2a)^n}{2} \\ \dfrac{1-(1-2a)^n}{2} \end{pmatrix}$$

   D'où : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ a_n = \dfrac{1+(1-2a)^n}{2} \text{ et } b_n = \dfrac{1-(1-2a)^n}{2}.}$

Partie II

8. Il suffit de poser le calcul et de vérifier :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = I_3$$

Alors, P est carrée et inversible à droite donc est inversible, et son inverse à droite est son inverse, donc on a bien

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

9. Il suffit de poser le calcul de AP et PD, puis de multiplier l'égalité obtenue par P^{-1}.

10. $\boxed{\text{Montrons par récurrence } \forall n \in \mathbb{N}, P(n) : \text{“}A^n = PD^nP^{-1}\text{”}.}$

Initialisation : $P(0)$ s'écrit $A^0 = PD^0P^{-1}$. Or, $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. D'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$. D'après la question précédente, $A = PDP^{-1}$. Par $P(n)$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Donc par produit :

$$A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = AD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ceci démontre $P(n+1)$, d'où l'hérédité.

11. La matrice $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonale, donc le calcul de ses puissances est immédiat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. en posant le calcul de PD^nP^{-1} on trouve

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$M^n = (\frac{1}{4}A)^n = \frac{1}{4^n}A^n = \frac{1}{3\cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

13. Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n, resp. C_n) l'événement “l'élève répond à la n-ième question par la réponse (a)” (resp. “par la réponse (b)”, resp. “ par la réponse (c)”). Les probabilités respectives de ces événements sont donc a_n, b_n et c_n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, (A_n, B_n, C_n) forme un SCE. Si $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$ sont non nuls, alors la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = a_n\frac{1}{2} + b_n\frac{1}{4} + c_n\frac{1}{4}$$

et on remarque que l'égalité

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = a_n\frac{1}{2} + b_n\frac{1}{4} + c_n\frac{1}{4}$$

est aussi vraie sans la condition sur $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$ (car alors, on peut exclure les événements de probabilité nulle du SCE, et l'égalité ci-dessus ne rajoute qu'un facteur nul).

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n.$$

On démontre de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

14. $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé.

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les trois égalités obtenues question 13 sont équivalentes à l'égalité matricielle :

$$X_{n+1} = MX_n.$$

16. On rédige à nouveau une récurrence pour montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = M^{n-1}X_1$$

D'après le calcul obtenu question 12,

$$M^{n-1} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} \begin{pmatrix} 4^{n-1}+2 & 4^{n-1}-1 & 4^{n-1}-1 \\ 4^{n-1}-1 & 4^{n-1}+2 & 4^{n-1}-1 \\ 4^{n-1}-1 & 4^{n-1}-1 & 4^{n-1}+2 \end{pmatrix}.$$

donc en posant le produit matriciel $M^{n-1}X_1$, il vient :

$$a_n = \frac{1}{6 \cdot 4^{n-1}}(2 \cdot 4^{n-1} + 1)$$

$$b_n = \frac{1}{6 \cdot 4^{n-1}}(2 \cdot 4^{n-1} + 1)$$

$$c_n = \frac{1}{6 \cdot 4^{n-1}}(2 \cdot 4^{n-1} - 2)$$