# Chapitre 16 : Dérivation

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

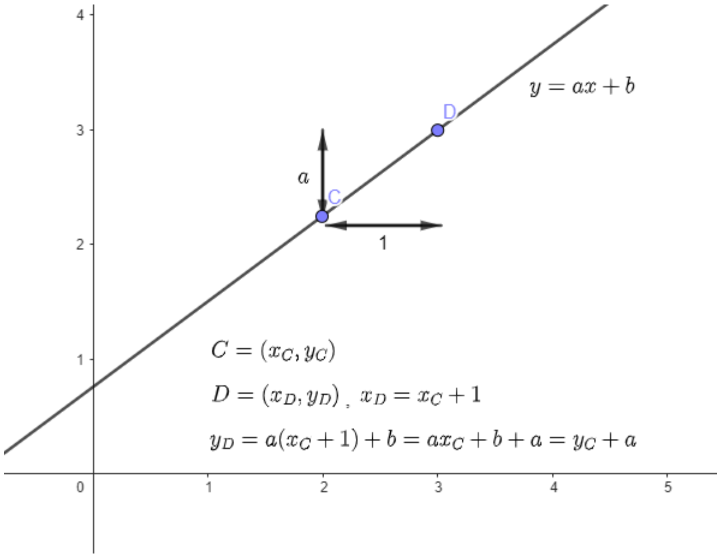
## Table des matières

# I. Notion de fonction dérivable

## 1. Pente, taux d'accroissement

**Définition 1.** Soient $a$ et $b$ deux réels. Considérons la droite $d$ non verticale d'équation cartésienne $y = ax + b$. On dit que $a$ est ***la pente***, ou ***le coefficient directeur*** de $d$.

**Remarque.** La pente d'une droite non verticale représente la variation d'ordonnée obtenue en se déplaçant de 1 en abscisse. Pour cette raison, on dit généralement qu'une droite verticale (donc, d'équation $x = c$) admet une pente de $+\infty$.

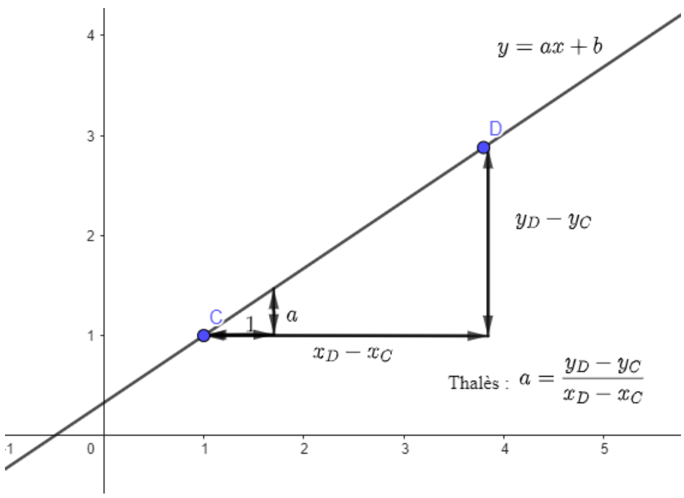



**Proposition 2.** *Soient $C$ et $D$ deux points distincts d'une droite non verticale, d'équation $y = ax+b$. Alors, la pente $a$ de cette droite est :*

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

*où $C = (x_C, y_C)$ et $D = (x_D, y_D)$.*

Cette proposition est une conséquence du théorème de Thalès.

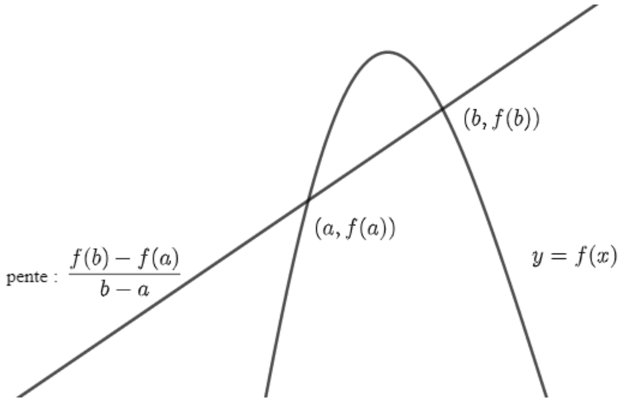



Ceci explique la définition suivante.

**Définition 3.** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soient $a$ et $b$ deux éléments distincts de $I$. On appelle ***taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $b$*** le réel :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Remarque.** Le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $b$ est la pente de la droite passant par les points du graphe de $f$ d'abscisses $a$ et $b$.




**Remarque.** L'ordre de $a$ et $b$ ne compte pas dans la définition ci-dessus, car :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Autrement dit, le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $b$ est aussi le taux d'accroissement de $f$ entre $b$ et $a$.

## 2. Nombre dérivé

Considérons le taux d'accroissement $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ d'une fonction $f$ entre deux points $a$ et $b$. Plus $b$ est proche de $a$, plus la droite envisagée par ce taux d'accroissement se rapproche de ce qu'on veut appeler la tangente de la courbe de $f$ au point $a$.

**Définition 4.** Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction réelle définie sur un $I$. Soit $a \in I$. On dit que ***$f$ est dérivable en $a$*** si le taux d'accroissement $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ admet une limite finie quand $b$ tend vers $a$.
Dans ce cas, on appelle **nombre dérivé de $f$ en $a$** le réel noté $f'(a)$ donné par :

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Remarque.** Sous réserve d'existence, le nombre dérivé de $f$ en $a$ est donc la pente de la tangente à la courbe de $f$ au point $(a, f(a))$.

**Remarque.** Au lieu de considérer la limite de $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ lorsque $b$ tend vers $a$, on considère généralement la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0. Cela donne une caractérisation équivalente de la dérivabilité, car pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

On procède alors au changement de variable $h = b - a$ dans un sens, et $b = a + h$ dans l'autre.

**Proposition 5.** *Dans le contexte de la définition ci-dessus, il est équivalent de dire:*

*(i) $f$ est dérivable en $a$,*

*(ii) la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.*

*Dans ce cas,*

$$f'(a) = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

**Démonstration.** Voir remarque ci-dessus. □

**Exemple 6.** $(i)$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, le monôme $f_n : t \mapsto t^n$ est dérivable en $x$, et

$$f_n'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ si } n = 0 \end{cases}.$$

$(ii)$ Considérons la fonction racine carrée donnée par $r(x) = \sqrt{x}$.
Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $r$ est dérivable en $x$, et

$$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction $r$ n'est pas dérivable en 0, et

$$\lim_{b\to 0} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{0}}{b-0} = +\infty.$$

**Proposition 7.** *La valeur des limites suivantes est admise :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

**Remarque.** Ces limites donnent directement :

$(i)$ La dérivabilité de l'exponentielle en 0, et la valeur de son nombre dérivé en 0 : $\exp'(0) = 1$.

$(ii)$ La dérivabilité du logarithme en 1, et $\ln'(1) = 1$.

**Exemple 8.** Dans cet exemple, on utilise les propriétés de morphisme de l'exponentielle et du logarithme pour démontrer leur dérivabilité à partir des limites admises ci-dessus.

$(i)$ La fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$ est dérivable en tout réel $x$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$$

$(ii)$ La fonction logarithme $g : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable en tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{1}{x}.$$

## 3. Dérivabilité à gauche, à droite

**Définition 9.** Soit $I$ un intervalle, $f$ une fonction réelle définie sur $I$ et $a \in I$. On suppose dans $(i)$ que $f$ est définie sur un voisinage à droite de $a$, et dans $(ii)$ que $f$ est définie sur un voisinage à gauche de $a$.

$(i)$ On dit que $f$ est ***dérivable à droite*** en $a$ si la limite $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle ***nombre dérivé à droite de*** $f$ en $a$ le réel

$$f'_d(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

$(ii)$ On dit que $f$ est ***dérivable à gauche*** en $a$ si la limite $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas, on appelle ***nombre dérivé à gauche de*** $f$ en $a$ le réel

$$f'_g(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

**Remarque.** La dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction définie uniquement à gauche (resp. à droite) de $a$ n'est pas envisageable. Par exemple, étudier la dérivabilité à gauche de la racine carrée en 0 n'a pas de sens.

D'après les propositions correspondantes sur les limites :

**Proposition 10.** *Soit $f$ une fonction réelle définie sur un intervalle $I$, et $a \in I$. On suppose que $f$ est définie sur un voisinage de $a$. Alors, il est équivalent de dire :*

*(i) $f$ est dérivable en $a$*

*(ii) $f$ est dérivable à droite et à gauche en $a$, et $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

*Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.*

**Démonstration.** Résulte immédiatement de la proposition caractérisant les limites de fonctions à l'aide des limites à droite et à gauche (voir chapitre "limites de fonctions"). □

**Proposition 11.** *Soient $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in I$.*

*(i) On suppose que $f$ n'est définie que sur un voisinage à droite de $a$ ($a$ est donc la borne inférieure de $I$). Alors, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite en $a$, et dans ce cas :*

$$f'(a) = f'_d(a).$$

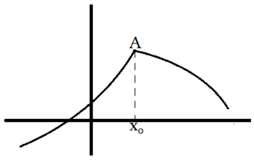
*(ii) On suppose que $f$ n'est définie que sur un voisinage à gauche de $a$ ($a$ est donc la borne supérieure de $I$). Alors, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche en $a$, et dans ce cas :*

$$f'(a) = f'_g(a).$$

**Démonstration.** Similaire à la proposition précédente (d'après une propriété correspondante sur les limites). □

**Exemple 12.** La fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0 si et seulement si elle est dérivable à droite en 0.

**Remarque.** (Et définition :) On dit que la courbe de $f : I \to \mathbb{R}$ admet un ***point anguleux*** en $a \in I$ si $f$ est dérivable à droite et à gauche en $a$, mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$. Dans ce cas, $f$ n'est pas dérivable en $a$.




**Exemple 13.** $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0, mais n'est pas dérivable en 0 : 0 est un point anguleux car $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

**Remarque. À partir de maintenant et pour toute la suite du chapitre,** les intervalles considérés seront non vide et non réduit à un point.

## 4. Tangente en un point

**Définition 14.** Soit $I$ un intervalle. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si $f$ est dérivable en $a$, on appelle ***tangente à la courbe de $f$ en $a$*** la droite d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

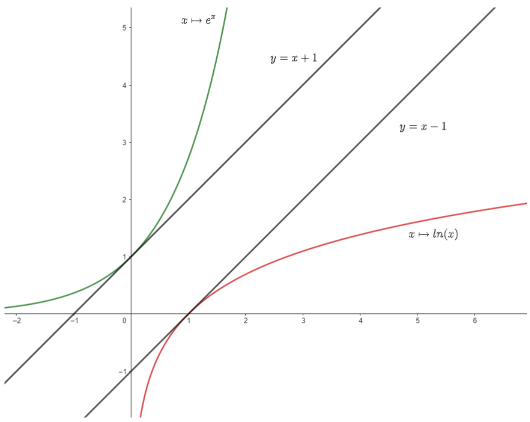
**Remarque.** Sous réserve d'existence, la tangente de la courbe de $f$ en $a$ est l'unique droite de pente $f'(a)$ passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$. C'est comme ça qu'on retient bien cette formule : la pente de la droite donnée est clairement $f'(a)$, et cette droite passe clairement par $(a, f(a))$.

**Exemple 15.** $(i)$ La tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0 est la droite d'équation :

$$y = x + 1$$

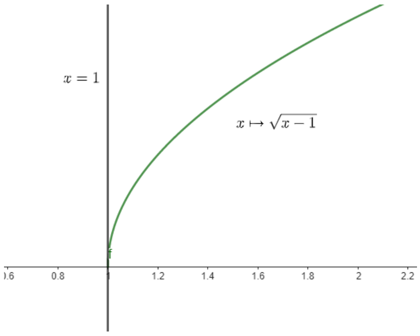
$(ii)$ La tangente à la courbe de la fonction logarithme en 1 est la droite d'équation :

$$y = x - 1$$




**Définition 16.** Soit $I$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que la courbe de $f$ admet une ***tangente verticale en $a$*** si :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \pm\infty.$$




**Exemple 17.** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ admet une tangente verticale en 0.

## 5. Lien avec la continuité

**Proposition 18.** *Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et soit $a \in I$. Si $f$ est dérivable en $a$ , alors $f$ est continue en $a$.*

**Démonstration.** A noter. □

**Remarque.** Cela permet, après avoir justifié la dérivabilité des fonctions rencontrées, d'obtenir d'emblée leur continuité.

**Remarque.** La fonction partie entière n'est pas continue en 0, donc n'est pas dérivable en 0 par contraposée.

## 6. Développement limité à l'ordre 1

La notion de développement limité à l'ordre 1 en un point $a$ d'une fonction dérivable formalise l'approximation de cette fonction par la fonction affine donnant sa tangente.

**Définition 19.** Soit $I$ un intervalle, soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
On appelle **développement limité de $f$ à l'ordre 1 en** $a$ la donnée de réels $\alpha, \beta$ et d'une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

(i) $\forall x \in I, f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$

(ii) $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Un résultat particulièrement important est le suivant.

**Proposition 20.** *Soit $I$ un intervalle et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.*
*Il est équivalent de dire :*

*(i) $f$ est dérivable en $a$, et*

*(ii) $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$.*

*Dans ce cas, $f$ admet un unique développement limité à l'ordre 1 en $a$, donné par :*

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$$

*où $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

**Démonstration.** À noter. □

**Remarque.** Si $f$ est dérivable en $a$, on peut donc légitimement invoquer "**le** développement limite à l'ordre 1 de $f$ en $a$".

**Remarque.** L'énoncé ne dit pas "qui est $\epsilon$", mais que si $f$ est dérivable en $a$, alors la fonction $\epsilon$ de ce développement limité existe et est unique. Elle est explicitée dans la démonstration.

**Remarque.** Dans l'égalité $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$, on reconnait :

($i$) la formule de la tangente $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$, additionnée à

($ii$) la fonction $x \mapsto (x-a)\epsilon(x)$ qui est le produit de $x \mapsto (x-a)^1$ par une fonction qui tend vers 0 en $a$ (c'est donc une fonction qui tend vers 0 "plus vite" que $x \mapsto (x-a)^1$ en $a$, d'où la terminologie de développement limité "à l'ordre 1").

## 7. Fonction dérivée

**Définition 21.** Soit $f$ une fonction réelle définie sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$. On dit que $f$ ***est dérivable sur*** $D$ si $f$ est dérivable en tout point $x$ de $D$.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de $f$ sur $D$ la fonction

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

**Remarque.** Pour vérifier qu'une fonction est dérivable sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$, nous utiliserons généralement les propositions de la partie suivante. Dans les autres cas, on reviendra à la définition (en considérant le taux d'accroissement), et on ne considèrera que les dérivabilité à gauche ou a droite pour les bornes du domaine d'étude.

**Remarque.** La considération d'une ***partie*** $D$ dans la définition précédente permet de définir ces notions pour, par exemple, des réunions d'intervalles.

**Exemple 22.** Montrons que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

**Exemple 23.** Si $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Démonstration : partie suivante, comme composée de la fonction inverse et d'un monôme.

**Exemple 24.** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration : partie suivante, comme composée.

**Exemple 25.** Toute fonction constante est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée la fonction nulle.

**Proposition 26.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions qui coïncident sur un intervalle ouvert $I$.*
*Alors, $f$ est dérivable sur $I$ si, et seulement si, $g$ est dérivable sur $I$.*
*Dans ce cas, les fonctions dérivées de $f$ et $g$ sont coïncident sur $I$.*

Voici un **Tableau récapitulatif** des dérivées déjà rencontrées.

| Fonction | Dérivée | Domaine |
|---|---|---|
| $x^n, n \in \mathbb{N}$ | | |
| $x^n, n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ | | |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | | |
| $\sqrt{x}$ | | |
| $e^x$ | | |
| $\ln(x)$ | | |

**Remarque.** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ : la 4e ligne est un cas particulier de la 3e.

# II. Opérations sur les fonctions dérivables

## 1. Combinaisons linéaires, produit et quotient

**Proposition 27.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$. Alors :*

*(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $D$, et*

$$\forall x \in D, (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

*On dit que la dérivation est linéaire (elle est compatible avec les combinaisons linéaires).*

*(ii) La fonction $fg$ est dérivable sur $D$, et*

$$\forall x \in D, (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

*(iii) Si de plus $g$ ne s'annule pas sur $D$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $D$, et*

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Démonstration.** Combinaison linéaire et produit à noter. Le quotient sera traité plus tard, à l'aide de l'inverse (de manière indépendante). □

En pratique, on utilise donc la proposition suivante :

**Proposition 28.** *Toute combinaison linéaire, tout produit ou tout quotient de fonctions dérivables sur leurs domaines de définitions est dérivable sur son domaine de définition.*

**Exemple 29.** Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction dérivée d'un polynôme est donnée par le polynôme dérivé.

## 2. Composition

**Proposition 30.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f(I) \subset J$. Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et si $g$ est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

**Démonstration.** A noter. ☐

En pratique, on utilise :

**Proposition 31.** *Toute composée (bien définie) de fonctions dérivables sur leur domaine de définition est dérivable sur son domaine de définition.*

**Exemple 32.** Étudions la dérivabilité des fonctions :

(*i*) $f_1 : x \mapsto \ln(1+x^2)$,

(*ii*) $f_2 : x \mapsto (x^3-1)^n$.

**Remarque.** Attention, la fonction racine carrée est une fonction courante, qui est définie sur $\mathbb{R}_+$ et non dérivable en 0. Ainsi, les propositions ci-dessus permettent de justifier la dérivabilité d'une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ uniquement en les points $x$ tels que $f(x) \neq 0$.

**Exemple 33.** Étudions la dérivabilités de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

**Exemple 34.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g : x \mapsto f(x)^n$ est dérivable sur $I$ et :

$$\forall x \in I, g'(x) = nf(x)^{n-1} \times f'(x).$$

Cette formule est aussi valable pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$ si $f$ ne s'annule pas, et pour $n = 0$, $g$ est la fonction constante égale à 1 donc est dérivable de dérivée nulle.

**Exemple 35.** Si une fonction $f$ est dérivable et non nulle sur $I$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur $I$ et :

$$\forall x \in I, \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

**Démonstration.** Terminons la démonstration de la proposition 26 : démontrons la formule donnant la dérivée d'un quotient. ☐

## 3. Dérivation de la réciproque d'une fonction bijective (HP)

**Proposition 36.** *Soit $f : I \to J$ une fonction réelle bijective. Soit $x \in I$ tel que $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x) \neq 0$. Alors, $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y = f(x)$, et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Démonstration.** La dérivabilité de $f^{-1}$ est admise (mais accessible, à condition d'admettre sa continuité, comme pour le théorème de la bijection). La méthode utilisée pour trouver la formule est très instructive.

Démonstration de la formule : à noter. ☐

**Remarque.** La méthode vue dans la démonstration est à connaitre, mais ce résultat est hors programme.

Une conséquence simple :

**Proposition 37.** *Si une fonction bijective est dérivable sur son domaine de définition, et si sa dérivée ne s'annule pas, alors sa fonction réciproque est dérivable sur son domaine de définition.*

## 4. Tableau récapitulatif

Dans ce tableau, $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables.

| Opération | Nombre dérivé en $x$ | Conditions supplémentaires de dérivabilité |
|---|---|---|
| $\alpha u + \beta v$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ | | |
| $uv$ | | |
| $u^n$, $n \in \mathbb{Z}$ | | |
| $u^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | | |
| $\dfrac{u}{v}$ | | |
| $\sqrt{u}$ | | |
| $e^u$ | | |
| $\ln(u)$ | | |
| $u \circ v$ | | |
| $u^{-1}$ | | |

**Exercice 38.** Déterminer le domaine de dérivabilité et les dérivées des fonctions données par :

$(i)$ $f(x) = a^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, $(ii)$ $g(x) = \ln(e^{3x} + 4x^2)$ $(iii)$ $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

## 5. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Définition 39.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $n$ un entier.

$(i)$ On dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ si l'on peut dériver $n$ fois successivement la fonction $f$ sur l'intervalle $I$. Dans ce cas, on note $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ la fonction dérivée $n$-ième de $f$ sur $I$. Par convention, on note $f^{(0)} = f$, et $f'' = f^{(2)}$.

$(ii)$ On dit que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$ si $f$ est $n$ fois dérivable sur l'intervalle $I$, et si de plus $f^{(n)}$ est continue sur $I$. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.

$(iii)$ On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier $n$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

**Remarque.** Ainsi, une fonction $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I$ si et seulement si $f$ et $f'$ sont dérivables sur $I$, et si de plus $f''$ est continue sur $I$.

**Remarque.** Attention à ne pas oublier la condition de continuité de $f^{(n)}$ sur $I$ pour montrer qu'une fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$. Toute fonction dérivable sur $I$ y étant continue, si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors les fonctions $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues et dérivables sur $I$, et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur $I$.

**Remarque.** Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors pour tout entier $n$, $f^{(n)}$ est bien définie et continue sur $I$. Et c'est une équivalence.

**Remarque.** Pour une définition plus formelle, la suite de fonctions $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $f^{(0)} = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, sous réserve de dérivabilité.

**Exemple 40.** La fonction exponentielle, notée ici $f$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f' = f$. Une récurrence immédiate montre alors que l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = f.$$

**Proposition 41.** *(i) Les fonctions polynomiales, les fractions rationnelles, l'exponentielle et le logarithme sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.*

*(ii) La fonctions $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (cet énoncé inclus la racine carrée).*

*(iii) Sous réserve de bonne définition, toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient et toute composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur leur domaine de définition est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur son domaine de définition.*

**Remarque.** Les démonstrations se font par récurrence, et sont sans surprise.

**Remarque.** On peut donc utiliser le même schéma de rédaction pour le caractère $\mathcal{C}^n$ d'une fonction que pour la continuité et la dérivabilité.

**Exemple 42.** Déterminer le domaine de définition de la fonction donnée par $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1})$ et montrer que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

**Remarque.** Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ est simplement une fonction continue.

Passons aux formules permettant de calculer des dérivées $n$-ièmes :

**Proposition 43.** *Soit $n$ un entier naturel. Soient $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables sur un intervalle $I$. Alors,*

*(i) Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et :*

$$\forall x \in I, (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

*(ii) La fonction $fg$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et :*

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

**Démonstration.** À noter. □

Une conséquence directe :

**Proposition 44.** *Le produit et la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $I$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.*

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que si $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors les fonctions $f^{(k)}$ sont toutes continues et les formules précédentes montrent donc que les fonctions $(f+g)^{(n)}$ et $(fg)^{(n)}$ sont continues, par opérations. □

**Exemple 44.** Voici quelques méthodes classiques liées aux dérivées $n$-ièmes.

(*i*) Soit $f : x \mapsto xe^x$, soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f$ est $n$ fois dérivable et déterminer $f^{(n)}$.

(*ii*) Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Montrer que $g$ est de classe $C^\infty$ sur son domaine $D_g$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D_g, g^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

(*iii*) Soit $h : x \mapsto x^2e^{2x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que $h$ est $n$ fois dérivable et déterminer $h^{(n)}$.

# III. Le théorème des accroissements finis, causes et conséquences

Chaque théorème de cette partie est un des grands théorèmes de l'analyse réelle.

## 1. Extrema locaux et dérivation

**Définition 45.** Soit $D$ une partie (non vide) de $\mathbb{R}$. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a \in D$.

(*i*) On dit que $f$ admet un **maximum local** en $a$ si :

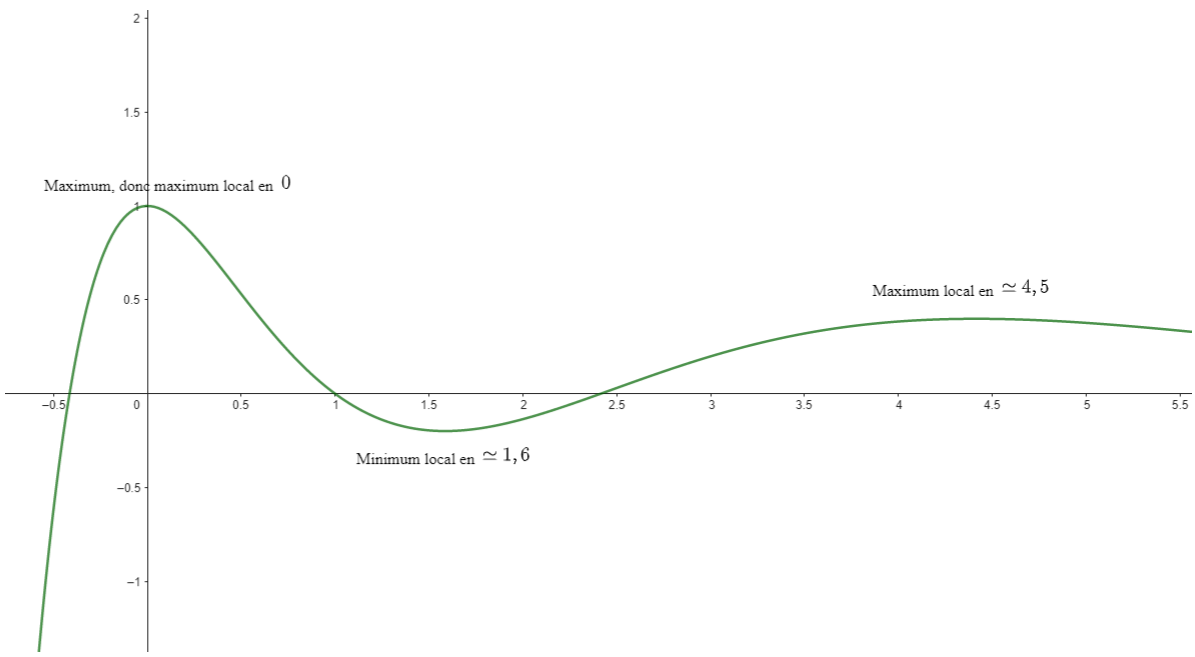
$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ]a-\delta, a+\delta[, f(x) \leq f(a).$$

(*ii*) On dit que $f$ admet un **minimum local** en $a$ si :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ]a-\delta, a+\delta[, f(x) \geq f(a).$$

(*iii*) On dit que $f$ admet un **extremum local** en $a$ si $f$ admet un minimum local ou un maximum local en $a$.

**Remarque.** Si $f$ admet un maximum (resp. minimum) en $a$ sur $D$, alors a fortiori $f$ admet un maximum local (resp. un minimum local) en $a$.



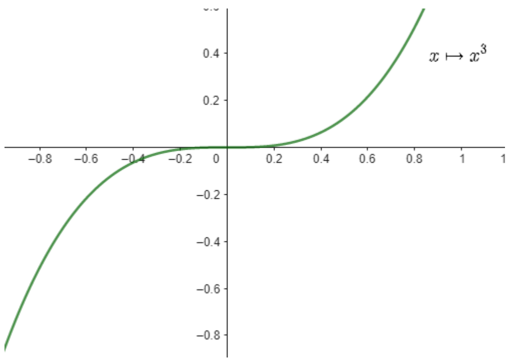
**Proposition 46.** **(Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1.)** *Soit $I$ un intervalle. Soient $f$ une fonction réelle définie sur $I$ et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de $I$. On suppose $f$ dérivable en $a$.*
*Si $f$ admet un extremum local en $a$, alors $f'(a) = 0$.*

**Remarque.** La condition "$a$ n'est pas une extrémité de $I$" est nécessaire. Par exemple, $f : x \mapsto x$ admet un minimum en 0 sur l'intervalle $[0, 1]$, mais $f'(0) = 1$. Dessin à noter.

**Démonstration.** À noter. $\square$

**Remarque.** L'interprétation graphique est importante : en un maximum local "intérieur" à $I$, la courbe de $f$ admet une tangente horizontale (sa pente est nulle).

**Remarque.** Cette proposition donne une condition **nécessaire mais pas suffisante** pour avoir un extremum local. Exemple : $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local de cette fonction sur $\mathbb{R}$.




**Remarque.** Une condition suffisante sera donnée, à l'aide du théorème des accroissements finis.

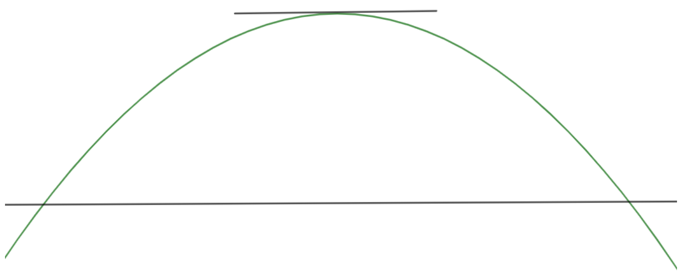
## 2. Le lemme de Rolle (HP)

Cet énoncé est légèrement hors programme et vous ne devriez pas être interrogé dessus, mais il est essentiel pour comprendre le cours dans sa continuité.

**Proposition 47.** **(Lemme de Rolle.)** *Soit $I$ un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $a, b$ deux éléments de $I$ tels que $a < b$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$. Alors :*

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0.$$

**Démonstration.** À noter $\square$

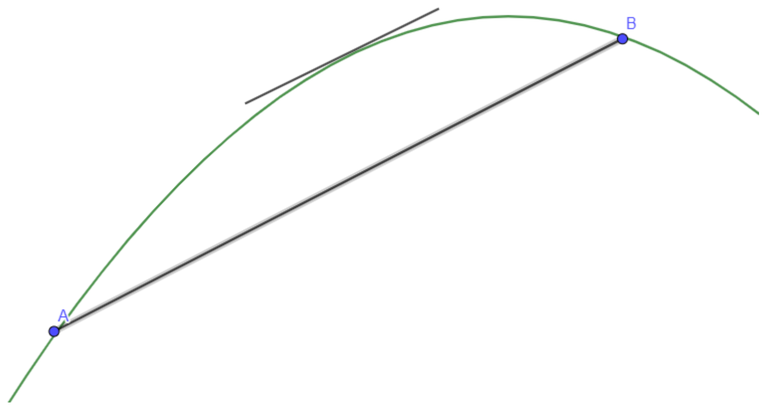


## 3. Le théorème des accroissements finis (HP)

Voici le théorème des accroissements finis.

**Théorème 48.** *Soit $f$ une fonction réelle définie sur un intervalle $I$ et $a, b$ deux éléments de $I$ tels que $a < b$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :*

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



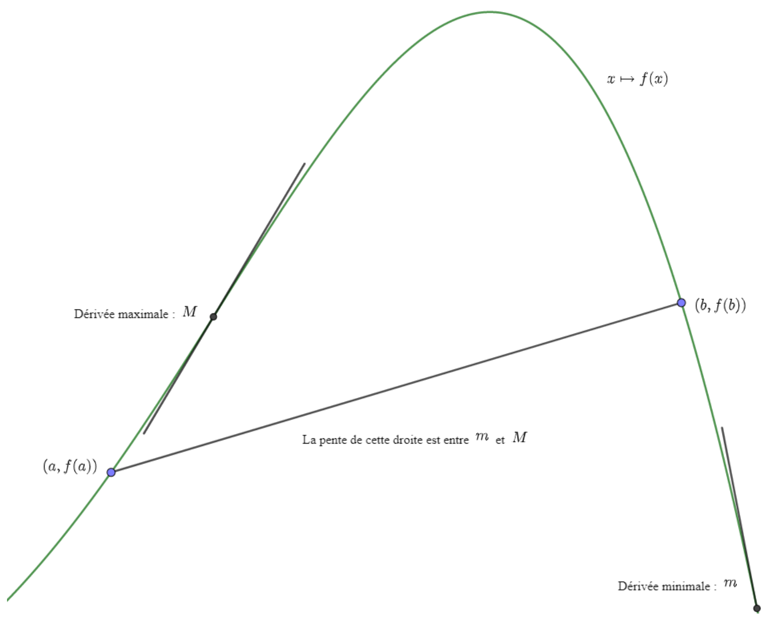

**Démonstration.** À noter □

**Remarque.** C'est une version "penchée" du lemme de Rolle, et c'est exactement ce que traduit la démonstration.

**Remarque.** Ce théorème remarquable dit que, sous les hypothèses de continuité et de dérivabilité données, tout taux d'accroissement est une valeur prise par la fonction dérivée.

## 4. L'inégalité des accroissements finis

Ce théorème et son corollaire au programme formalisent le fait suivant : si la fonction dérivée de $f$ est majorée par $M$ et minorée par $m$ sur un intervalle, alors tous les taux d'accroissements de $f$ sur cet intervalle sont majorés par $M$ et minorés par $m$.



**Proposition 49.** ***(Inégalité des accroissements finis, version "HP")***
*Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f$ une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose $f$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Supposons donnés deux réels $m$ et $M$ tels que*

$$\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M,$$

*alors :*

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

**Remarque.** Si on ne sait que majorer ou que minorer la dérivée, on peut tout de même conclure à une inégalité. Plus précisément, si $m$ est un minorant de $f'$ sur $]a, b[$, alors

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(avec les notations de l'énoncé).

**Démonstration.** À noter. □

**Voici la version explicitement au programme**, aux hypothèses simplifiées :

**Proposition 50.** ***(Inégalité des accroissements finis)***
*Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$. Supposons donné un réel $k$ tel que :*

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

*Alors :*

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

**Démonstration.** À noter. □

L'inégalité des accroissements finis est un outil remarquable pour démontrer des inégalités. Pour cela, il faut apprendre à "reconnaitre des taux d'accroissement".

**Exemple 51.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

**Exemple 52.** Montrer que si $a$ et $b$ sont des réels tels que $a \leq b \leq -1$, alors

$$e^b - e^a \leq \frac{b - a}{e}$$

## 5. Applications de l'IAF à la monotonie.

Le lien entre la monotonie et la dérivée d'une fonction se démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.

**Proposition 53.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$. Alors :*

*(i) La fonction $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.*

*(ii) La fonction $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.*

*(iii) La fonction $f$ est constante sur $I$ si et seulement si : $\forall x \in I, f'(x) = 0$.*

**Démonstration.** À noter. □

**Remarque.** Attention : la proposition devient complètement fausse si on ne se place pas sur un intervalle. Penser à $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Pour la monotonie stricte, la “vraie” condition équivalente est plus subtile et n’est pas donnée. On se contente de cet énoncé.

**Proposition 54.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ telle que : $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$).*
*Si $f'$ ne s’annule qu’en un nombre fini de points sur $I$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$ (resp. strictement décroissante sur $I$).*

**Démonstration.** À noter. □

**Remarque.** Ainsi, on pourra justifier que $f$ est strictement croissante sur $I$ en vérifiant que l’inégalité $f'(x) > 0$ est vraie pour tout $x \in I$ sauf en un nombre fini de points (où la dérivée s’annulera dans ce cas - admis et non trivial dans le cas général). Et idem pour la stricte décroissante (avec $f'(x) < 0$).

**Exemple 55.** La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

## 6. Une condition suffisante d’extremum local

**Proposition 56.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l’intervalle $I$, et soit $a \in I$.*
*Si $f'$ s’annule en $a$ en changeant de signe, alors $f$ admet un extremum local en $a$.*
*Autrement dit, s’il existe un réel $\delta > 0$ tel que*

*(i)* $f'(a) = 0$,

*(ii)* $\forall x \in I \cap ]a-\delta, a], f'(x) \geq 0$ *(resp. $f'(x) \leq 0$),*

*(iii)* $\forall x \in I \cap [a, a+\delta[, f'(x) \leq 0$ *(resp. $f'(x) \geq 0$),*

*alors $f$ admet un extremum local en $a$.*

**Remarque.** Cette proposition justifie que le tableau de variation fait bien apparaitre les extrema locaux de $f$.

**Remarque.** Dans le contexte de la proposition, si $f'$ passe de négative à positive en $a$, alors $f$ admet un minimum local en $a$, et dans l’autre cas c’est un maximum local en $a$. Le tableau de variation rend cela très clair.

**Démonstration.** À noter. □

**Exemple 57.** Déterminons les extrema locaux de $x \mapsto x^3 - x$.

## 7. Accroissements finis et étude de suites

Voici des démarches très classiques où l'on utilise l'inégalité des accroissements finis pour démontrer des résultats de convergence sur des suites.

**Exemple 58.** Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

$(i)$ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. *(Préparation à l'utilisation de l'IAF)*

$(ii)$ Montrer qu'il existe un unique réel positif $\phi$ tel que $f(\phi) = \phi$. *(On introduit un point fixe de $f$)*

$(iii)$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}$. *(On utilise l'IAF)*

$(iv)$ En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \phi| \leq \frac{|u_0 - \phi|}{2^n}$. *(On itère la relation précédente, avec une récurrence)*

$(v)$ Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi$. *(Et on conclut !)*

$(vi)$ On prend $u_0 = 1$. Écrire un code Python fournissant une approximation à $10^{-6}$ près de $\phi$.

Voici une autre version classique suivant une démarche proche, version "séries".

**Exemple 59.** Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

$(i)$ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. *(Idem)*

$(ii)$ En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_n - u_{n-1}|}{2}$ *(On utilise l'IAF et la question précédente)*

$(iii)$ En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^n}$ *(Encore une fois, on itère la relation précédente)*

$(iv)$ En déduire que la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge *(On passe par la convergence absolue pour utiliser la question précédente)*

$(v)$ En déduire que $u$ converge. *(Routinier, série télescopique)*

$(vi)$ Déterminer la limite de $u$. *(Ici, on doit trouver les (le) points fixes de $f$, avec l'argument d'unicité de la limite)*