Lycée Hoche
ECG1A

2025-2026
Mathématiques

Devoir maison n°5

À rendre le lundi 9 mars 2026

Exercice 1 *Vers la formule de Stirling.*

La formule de Stirling est un équivalent (voir 2ème année) permettant d'estimer la vitesse de croissance de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$*. Le résultat final est le suivant :*

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite u converge vers un réel strictement positif K.

Pour démontrer la formule de Stirling, il resterait à donner la valeur de K*.*

Partie A

1. Justifier que $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, la limite de $\dfrac{n!}{n^k}$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Existe-t-il un entier k tel que la suite $(\dfrac{n!}{n^k})_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée?

Partie B

5. Démontrer $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x$.

   On a besoin de raffiner cette inégalité classique.
6. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

   Dans la suite de l'exercice, on admet :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$ puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   (a) Justifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - n\ln(n) + n - \dfrac{1}{2}\ln(n)$.
   (c) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
8. (a) Déduire des questions précédentes :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq w_n \leq \frac{1}{4n^2}.$$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{12n^2} + \dfrac{1}{6n^3} \leq \dfrac{1}{4n^2}$.

(c) En déduire la donnée d'un réel $C > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |w_n| \leq \frac{C}{n^2}$.

9. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge.

10. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente?

11. Montrer que la suite u converge vers un réel strictement positif, noté K dans la suite.

Partie C

Pour avoir une idée de la valeur de K, on cherche une conjecture à l'aide de l'outil informatique.

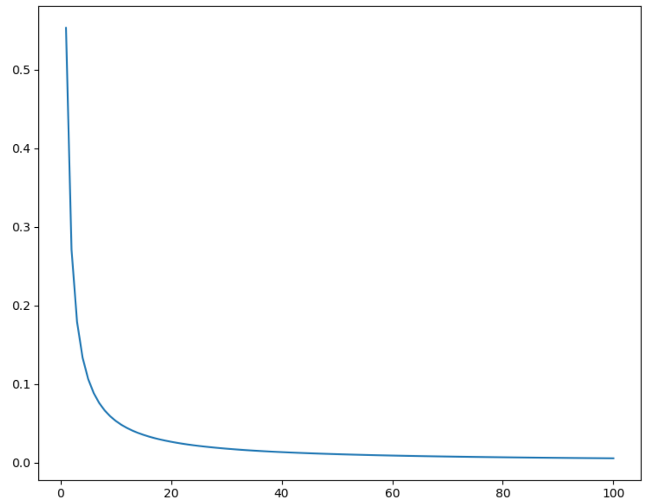
12. Écrire une fonction `Python` d'entête `factoriel(n):` prenant en entrée un entier `n` et renvoyant l'entier `n`!. *La fonction* `factorial(n)` *du module python* `math` *n'est pas autorisée ici.*

13. Écrire une fonction `Python` d'entête `def Conj(n):` prenant en entrée un entier n et renvoyant la valeur de $\frac{u_n^2}{2}$.

14. On exécute le programme ci-dessous.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.arange(1,101)
Y=[Conj(t)-np.pi for t in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Le graphique renvoyé est le suivant. Que conjecturer sur la valeur de K?



Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

I - Étude de (u_n).

1. Donner u_0, u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leq 2(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}})$.

   On pourra utiliser l'inégalité de concavité du logarithme : $\forall x \geq -1, \ln(1+x) \leq x$.

5. En déduire que (u_n) est majorée.

6. Déduire de ce qui précède que (u_n) converge vers un réel noté l, et montrer que $l \in [2, e^2]$.

7. Écrire un programme Python d'entête `def U(n):` prenant en entrée un entier naturel `n` et renvoyant $u_{\mathtt{n}}$.

   II - Étude de la série de terme général $l - u_n$.

8. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

9. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ converge, et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \ln(l).$$

10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\dfrac{l}{u_n}) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

11. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(\dfrac{l}{u_n}) \leq \dfrac{1}{2^n}$. On pourra utiliser l'inégalité de concavité du logarithme.

12. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq l\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

13. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x$.

14. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq \dfrac{l}{2^n}$.

15. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} l - u_n$?

— *fin* —