

## Programme de colle n° 20 : Dérivabilité (début)

Semaine du lundi 9 mars.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

### Dérivation

**20.1** Pente d'une droite non verticale. Taux d'accroissement d'une fonction entre deux points de son domaine. Nombre dérivé d'une fonction en un point de son domaine.

**20.2** Limites admises :  $\frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$  et  $\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ . Dérivabilité de l'exponentielle et du logarithme en tout point de leur domaine.

**20.3** Dérivabilité à gauche ou à droite d'une fonction en un point, nombre dérivé à gauche ou à droite d'une fonction en un point. Caractérisations de la dérivabilité en  $a$  avec les dérivabilités à gauche ou à droite en  $a$  (deux cas possible, selon que  $a$  est une borne du domaine de définition de la fonction envisagée ou non). Notion de point anguleux.

**20.4** Tangente en un point de dérivabilité (rappel). Notion de tangente verticale.

**20.5** Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

**20.6** Notion de développement limité à l'ordre 1 d'une fonction en un point de son domaine. Une fonction  $f$  est dérivable en un point  $a$  si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en  $a$ , forme et unicité du développement limité dans ce cas.

**20.7** Dérivabilité et fonction dérivée sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$ . Combinaisons linéaires, produit et quotient de fonctions dérivables sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$ . Toute combinaison linéaire, tout produit ou tout quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition est dérivable sur son domaine de définition.

**20.8** Dérivabilité et composition. Toute composée de fonctions dérivables sur leur domaine est dérivable sur son domaine de définition.

**20.9** Dérivation des bijection réciproque : dérivabilité (sous condition) admise, méthode permettant de calculer (sous réserve d'existence)  $(f^{-1})'$  à retenir.

### Dérivées successives

**20.10** Fonctions  $n$  fois dérivables. Notion de fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle  $I$ . Notations  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ .

**20.11** Les polynômes, les fractions rationnelles, l'exponentielle, le logarithme sont dérivables sur leur domaine.  $x \mapsto x^\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient et toute composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur leur domaine est de classe  $\mathcal{C}^n$  (resp.  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur son domaine.

**20.12** Dérivée  $n$ -ième d'une combinaison linéaire, d'un produit de fonctions  $n$  fois dérivables (formule de Leibniz).

### Python

**20.13** Graphes : conversions entre matrice d'adjacence et liste des listes d'adjacences. Fonction donnant le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets donnés. Distance (combinatoire) dans un graphe non orienté. Commande `np.inf`. Implémentation de la distance en Python. Connexité d'un graphe donné par sa matrice d'adjacence : implémentation d'une fonction Python. Classe de connexité d'un sommet. Fonction renvoyant (sous forme de liste) la classe de connexité d'un sommet donné (en utilisant simplement la distance).

*Les élèves doivent avoir compris le petit changement de variable nous faisant indifféremment considérer  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  lorsque  $b \rightarrow a$ , ou  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .*

*Résultat complètement HP, seule la méthode est à retenir.*

*Élèves : cette partie est valable en remplaçant  $I$  par une réunion d'intervalles.*

## Quelques questions de cours

1. Montrer que la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  à l'aide de la limite admise.
2. Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ , et déterminer  $f'$ .
3. Définir la notion de développement limité à l'ordre 1 d'une fonction en un point de son domaine. Énoncer la proposition (20) caractérisant la dérivabilité à l'aide de cette notion. Montrer que toute fonction  $f$  admettant un développement limité à l'ordre 1 en  $a \in D_f$  est dérivable en  $a$ , et que dans ce cas, son développement limité est de la forme donnée par la proposition 20.
4. Énoncer la proposition (27) relative aux combinaisons linéaires, aux produits et aux quotients de fonctions dérivables sur une partie de  $\mathbb{R}$ . Montrer l'énoncé relatif au produit.
5. Énoncer et démontrer la proposition (30) relative à la dérivabilité d'une composée de fonctions dérivables.
6. Énoncer la proposition (43) relative à la somme et au produit de deux fonctions  $n$  fois dérivables sur un intervalle  $I$ . Démontrer la formule de Leibniz, relative au produit.
7. Définir la distance entre deux sommets d'un graphe. Écrire le code d'une fonction Python d'entête `def distance(M,i,j):` prenant en entrée la matrice d'adjacence  $M$  d'un graphe  $G$  et les numéros  $i$  et  $j$  de deux de ses sommets (numérotés à partir de 0) et renvoyant en sortie la distance entre ces sommets dans le graphe  $G$ .