Programme de colle n^o 21 : Dérivation (fin). Espaces vectoriels (début)

*Semaine du lundi **16 mars**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Dérivation : l'inégalité des accroissements finis

21.1 Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1, sur un intevalle (en un point qui n'est pas une extrémité de cet intervalle).

21.2 Le lemme de Rolle. Le théorème des accroissements finis. — *HP, démonstrations faites en cours.*

21.3 L'inégalité des accroissements finis : version HP (avec un encadrement de f'). Version au programme : si f est dérivable sur un intervalle I et si on dispose d'un réel k tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$ pour tous éléments a et b de I. Exemples d'utilisations.

21.4 Monotonie et signe de la dérivée, condition suffisante de monotonie stricte (pour les fonctions dérivables).

21.5 Condition suffisante d'extrémum local (pour une fonction dérivable).

21.6 Exemple classique d'application de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude d'une suite récurrente.

Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

21.7 Opérations $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Définition et proposition : $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel (proposition en 9 points). Explication de "l'axiomatique" des espaces vectoriels (les propriétés dégagées dans la définition précédente sont valables dans beaucoup d'autres cas). Règles de calcul supplémentaires dans les espaces vectoriels (prop. 4). $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est également un espace vectoriel. Vocabulaire : vecteur, scalaire, vecteur nul, opposé d'un vecteur.

21.8 Dans la suite, E désigne $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

21.9 Notion de combinaison linéaire, coefficients d'une combinaison linéaire. Nombreux exemples et méthodes pour déterminer si un vecteur donné est combinaison linéaire de vecteurs donnés. — *Elèves : attention à la précision du langage : on dit que $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont DES coefficients de...*

Python

21.10 Révisions du premier semestre

Quelques questions de cours

1. La colle commencera obligatoirement par une question de cours Python des 10 premiers PC (PC01 à PC10).
2. Énoncer et démontrer (cas d'un maximum local) la condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1.
3. Énoncer le théorème des accroissements finis et l'illustrer. Énoncer l'inégalité des accroissements finis (version au programme) et démontrer ce résultat à l'aide du théorème des accroissements finis.
4. Énoncer et démontrer (cas croissant) la condition suffisante de monotonie stricte pour une fonction dérivable.
5. Énoncer la condition suffisante d'extremum local pour les fonctions dérivables sur un intervalle. Déterminer les extrema locaux de $x \mapsto x^3 - x$.
6. Énoncer la proposition 4 donnant les règles de calcul valables dans tout espace vectoriel. Démontrer les deux premiers points (simplification à gauche, caractérisation de la situation $\lambda \cdot x = 0_E$). Premier point : dans le contexte général où $(E, +, \cdot)$ vérifie la proposition 3, et en énonçant tous les points utilisés. Second point : uniquement dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, en revenant à la nature des éléments de $\mathbb{R}^n$. *Élèves : c'est exactement ce qu'on a fait en cours.*
7. Définir la notion de combinaison linéaire et de coefficients d'une combinaison linéaire. Le vecteur v suivant est-il combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ suivants ? ($v, u_1, \ldots, u_k$ explicités par l'interrogation, dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \leq 3$ et $k \leq 4$).