

TD de mathématiques n°17 : Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour commencer

Combinaisons linéaires

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (-1, 2, 0)$, $v = (3, -5, -1)$, $w = (0, 1, -2)$ et $x = (0, 1, 0)$.

- (a) Montrer que x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs u et v .
- (b) Montrer que x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs u et w .
- (c) Montrer que x n'est pas combinaison linéaire des vecteurs v et w .
- (d) Montrer que x est combinaison linéaire des vecteurs u, v et w et déterminer des coefficients de cette combinaison linéaire.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, -3)$ et $w = (1, 0, 1)$.

- (a) Le vecteur $x = (2, 3, -9)$ (resp. $y = (0, 0, 4)$) peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u, v et w ? Si oui, comment ?
- (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $z = (a, b, c)$ peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u, v et w ? Si oui, comment ?

Exercice 3 Soit $k \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, k, 2)$ et $v = (-1, 8, k)$.

Pour quelle(s) valeur(s) du réel k le vecteur $x = (1, 2, 1)$ peut-il s'écrire comme combinaison linéaire de u et v ?

Exercice 4 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- (a) Calculer les combinaisons linéaires $3A - 5B$ et $-7A + B$.
- (b) Est-il possible trouver une combinaison linéaire (autre que $0.A + 0.B$) de A et B égale au vecteur nul ?

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$.

- (a) Montrer que la famille (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $x = (2, 5, -1)$ dans la base (u, v, w) .

Exercice 6 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que la famille (A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- (b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base (A, B, C) .

Sous-espaces vectoriels, familles génératrices

Exercice 7 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- (a) $F_1 = \{(x, x, -x), x \in \mathbb{R}\}$
- (b) $F_4 = \{(x, y, |x + y|), x, y \in \mathbb{R}\}$
- (c) $F_2 = \{(x, 2x, 1 - x), x \in \mathbb{R}\}$
- (d) $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
- (e) $F_3 = \{(x, x - z, z), x, z \in \mathbb{R}\}$
- (f) $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 1 - z\}$

Exercice 8 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

$$\begin{aligned}
(a) \quad F_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}. & (d) \quad F_5 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 2x + y = 1 \right\}. \\
(b) \quad F_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 2x + y = 0 \right\}. & (e) \quad F_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}. \\
(c) \quad F_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}. & (f) \quad F_6 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x^2 + y = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

$$\begin{aligned}
(a) \quad F_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}. & (c) \quad F_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + y - z \\ x + 3y - 2z \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}. \\
(b) \quad F_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + 2y + z = 0 \right\}. & (d) \quad F_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Exercice 10 Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b - d \\ 3a + 2c \\ -a + 4d \\ b + 2c + 3d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de F .

Exercice 11 Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F .

Exercice 12 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\text{Vect}(A, B) = \text{Vect}(C, D)$.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

Montrer que $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et que $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 14 Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Donner un exemple concret de situation pour laquelle $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E .
- On suppose que $F \subset G$. Montrer que $G \setminus F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Sous-espaces vectoriels, bases et familles libres

Exercice 15 On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F .

Exercice 16 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer une base de $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 17 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (0, 1, 1), v = (2, 0, -1)$ et $w = (2, 1, 1)$.

- Déterminer une base de $\text{Vect}(u, v, w)$ extraite de la famille (u, v, w) .
- Déterminer les coordonnées du vecteur $x = (2, 0, -2)$ dans cette base.

Exercice 18 *Notations introduites dans l'exercice 13*

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une base de $\text{Ker}(A)$.

(b) Déterminer une base de $\text{Im}(A)$.

Exercice 19 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $s = (0, 0, 1, -1)$, $t = (0, 1, 0, -1)$, $u = (0, 2, -3, 1)$, $v = (0, 1, -2, 1)$ et enfin $w = (1, 0, 0, -1)$.

Déterminer une base de $\text{Vect}(s, t, u, v, w)$ extraite de la famille (s, t, u, v, w) .

Exercice 20 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (1, a, 2)$, $v_2 = (a, 1, 2)$ et $v_3 = (1, 2, a)$.

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ (en fonction de a).

Dimension et rang

Exercice 21 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z), x+3y-z=0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x+y-z=x-y+3z=0\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

(b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

Exercice 22 Soient $t = (-1, 2, 0)$, $u = (3, -5, -1)$, $v = (0, 1, -2)$ et $w = (1, -1, 1)$.

(a) La famille $\mathcal{F} = (t, u, v, w)$ est-elle libre?

(b) Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (t, u, v, w)$.

Exercice 23 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $t = (1, 0, 2, 3)$, $u = (0, 1, 2, 3)$, $v = (1, 2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 0, 0)$.

Montrer que la famille (t, u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^4$ en utilisant un argument de dimension.

Exercice 24 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (A, B, C)$.

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix}$, $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = X\}$ et $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = -X\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

(b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 26 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = \lambda.X\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ a-t-on $\dim(F) > 0$?

(c) Déterminer explicitement la valeur de $\dim(F)$ en fonction de la valeur de λ .

Exercice 27 Dans $\mathbb{R}^n$, on considère $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on pose $u_i = e_i - e_1$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $u_i \in F$.

(c) Déterminer une base de F et la valeur de $\dim(F)$.

(d) Soit $u_1 \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(0) = P'(1) = 0\}$.

(a) Relisez le cours et vérifiez que $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel (opérations définies dans le cours).

(b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (c) Déterminer une base et la dimension de E dans le cas où $n = 3$.

Pour continuer

Combinaisons linéaires

Exercice 29 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 2)$ et $v = (1, 1, -1)$.

- (a) Le vecteur $w = (3, 1, 0)$ (resp. $x = (1, 5, -7)$, resp. $y = (-1, -3, 4)$, resp. $z = (-2, 1, 4)$) peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u et v ? Si oui, comment ?
- (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $t = (a, b, c)$ peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire de u et v ? Si oui, comment ?

Exercice 30 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, resp. $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, resp. $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $E = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$) peut-elle s'écrire comme une combinaison linéaire de U et V ? Si oui, comment ?

- (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La matrice $F = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire comme une combinaison linéaire de U et V ? Si oui, comment ?

Exercice 31 Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de A, B et C .

- (b) Montrer que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de A, B et C .

Sous-espaces vectoriels, familles génératrices

Exercice 32 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit $E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = 0_{3,1}\}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | AX = X\}$.

Les ensembles E et F sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Exercice 33 Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ 3x - 7y + 5z = 0 \end{cases} \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F .

Exercice 34 Soient $t = (1, 1, -1)$, $u = (1, 2, -4)$ et $F = \text{Vect}(t, u)$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $v = (3, -1, a)$, $w = (2, 3, b)$ et $G = \text{Vect}(v, w)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a et b a-t-on l'égalité $F = G$?

Sous-espaces vectoriels, bases et familles libres

Exercice 35 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $t = (0, 0, 1, 1)$, $u = (0, 1, 0, 1)$, $v = (1, 0, 1, 0)$ et $w = (1, 3, 3, 1)$.

- (a) Montrer que la famille (t, u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $x = (1, 9, 3, 3)$ dans la base (t, u, v, w) .

Exercice 36 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille (A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 37 Dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que la famille (A, B, C, D) forme une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer les coordonnées de la matrice $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans la base (A, B, C, D) .

Exercice 38 Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer une base de $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 39 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer une base de $\text{Vect}(A, B, C)$.

Exercice 40 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $u_1, u_2, u_3 \in E$.

On suppose que la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) est une base de E .

(a) Montrer que la famille $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1)$ est une base de E .

(b) Montrer que la famille $(u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$ est une base de E .

Dimension et rang

Exercice 41 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(-2\alpha + \beta + \gamma, \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

Exercice 42 Soient $u = (1, 2, 0, 1)$, $v = (0, 1, -1, 2)$ et $w = (2, -1, 1, 3)$.

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

Exercice 43 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on pose $F_i = \text{Vect}(e_i, e_1 + e_2 + e_3 - e_i)$. Enfin, on pose $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$.

(a) Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, déterminer $\dim(F_i)$.

(b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(c) Montrer que $1 \leq \dim(F) \leq 2$.

(d) Déterminer $\dim(F)$.

Exercice 44 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et déterminer la valeur de $\dim(F)$.