Correction du DM n°5

Exercice 1

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Alors, $n! = n(n-1)! \geq n$ car $(n-1)! \geq 1$. On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, n! \geq n \\ n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{D'après le théorème de comparaison, } n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{n^k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{\prod_{j=0}^{k-1} n} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \prod_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{n}).$$

De plus,

$$\forall j \in [\![0, k-1]\!], 1 - \frac{j}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc par produit :

$$\prod_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \prod_{j=0}^{k-1} 1 = 1$$

d'où $\boxed{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq k+1}$. Alors,

$$\frac{n!}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}(n-k)!.$$

Or, d'après la question précédente, $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

De plus, $n! \underset{+}{\to} \infty$ et $n-k \underset{+}{\to} \infty$ donc par composition, $(n-k)! \underset{+}{\to} \infty$.

Finalement, par produit, $\boxed{\frac{n!}{n^k} \underset{+}{\to} \infty.}$

4. Soit k un entier. D'après la question précédente, la suite $(\frac{n!}{n^k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ donc elle n'est pas bornée. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \in \mathbb{N}, \text{ la suite } (\frac{n!}{n^k})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas bornée.}}$$

5. Convexité de ln ou poser $g(x) = \ln(1+x) - x$ et étudier g sur $\mathbb{R}_+$.

6. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Alors, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0.$$

Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \leq h(0) = 0$$

ce qui montre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $n! \geq 1 > 0$ et $\frac{n}{e} > 0$ donc $\left(\frac{n}{e}\right)^n > 0$, et enfin $\sqrt{n} > 0$. Ainsi, $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ est strictement positif comme quotient de réels strictement positifs.

$\boxed{\text{Ceci prouve que } v_n = \ln(u_n) \text{ est bien défini, pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_n = \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}\right) \\
&= \ln(\prod_{k=1}^{n} k) - \ln(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}) && \text{par propriété du logarithme} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - \ln(\left(\frac{n}{e}\right)^n) - \ln(n^{\frac{1}{2}}) && \text{par propriété du logarithme} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - n\ln(\frac{n}{e}) - \frac{1}{2}\ln(n) && \text{par propriété du logarithme} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - n\ln(n) + n\ln(e) - \frac{1}{2}\ln(n) && \text{par propriété du logarithme} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien montré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n).}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
w_n = v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)\right) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1) \\
&\quad - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) + n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= 1 + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right) - (n+1+\frac{1}{2})\ln(n+1) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) \\
&= 1 + \ln(n+1) - (n+1+\frac{1}{2})\ln(n+1) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) \text{ (par Chasles)} \\
&= 1 - (n+\frac{1}{2})\ln(n+1) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) \\
&= 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \text{ (par propriété du logarithme)} \\
&= 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien montré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).}$

8. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{1}{n} > 0$ donc :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$$

d'où $(n + \frac{1}{2} \geq 0)$:

$$(n + \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) \leq (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq (n + \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \right).$$

En simplifiant (le faire), il vient :

$$1 - \frac{1}{4n^2} \leq (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1 + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3}$$

donc

$$-1 - \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq -(n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq -1 + \frac{1}{4n^2}$$

donc :

$$-\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{4n^2}.$$

$\boxed{\text{On a bien montré : } \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq w_n \leq \frac{1}{4n^2}.}$

(*b*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} \leq \frac{1}{4n^2} &\iff 0 \leq \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \\ &\iff 0 \leq \frac{3n - n - 2}{12n^3} \\ &\iff 0 \leq \frac{n-1}{6n^3} \end{aligned}$$

Or, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n - 1 \geq 0$ et $6n^3 \geq 0$, donc la dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on a bien :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} \leq \frac{1}{4n^2}}$

(*c*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $-\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \geq -\frac{1}{4n^2}$.

D'après la question 8(*a*), $-\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq w_n \leq \frac{1}{4n^2}$. Ainsi,

$$-\frac{1}{4n^2} \leq -\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq w_n \leq \frac{1}{4n^2}$$

d'où :

$$-\frac{1}{4n^2} \leq w_n \leq \frac{1}{4n^2}.$$

Or, cette dernière inégalité est équivalente à :

$$|w_n| \leq \frac{1}{4n^2}.$$

$\boxed{\text{Finalement, pour } C = \frac{1}{4} > 0, \text{ on a bien } \forall n \in \mathbb{N}^*, |w_n| \leq \frac{C}{n^2}.}$

9. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |w_n| \leq C \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$. On en tire, par produit par un réel, que $\sum_{n\geq 1} C\frac{1}{n^2}$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} |w_n|$ converge.

$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum_{n\geq 1} w_n \text{ converge absolument, donc converge.}}$

10. Par théorème sur les séries télescopiques, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge. Or, d'après la question précédente, $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge, et par définition, $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_{n+1} - v_n$.

    $\boxed{\text{En conclusion, la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$

11. D'après la question précédente, la suite $(v_n)_n$ converge vers un réel, notons le l. Par continuité de l'exponentielle en $l \in \mathbb{R}$:
$$v_n \underset{l}{\rightarrow} \Longrightarrow u_n = e^{v_n} \underset{e}{\rightarrow}^{l} .$$

    $\boxed{\text{Finalement, la suite } u \text{ converge vers } K = e^l\text{, et } K > 0}$ car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

12. *Remarque : en français, on écrit factorielle, pas factoriel.*

```python
def factoriel(n):
    P=1
    for i in range(1,n+1):
        P=P*i
    return(P)
```

```python
import numpy as np
def Conj(n):
    un=factoriel(n)/(np.sqrt(n)*(n/np.e)**n)
    return(un**2/2)
```

13. Le graphique trace les valeurs de $\frac{u_n^2}{2} - \pi$ pour n entre 1 et 100. On peut conjecturer que
$$\frac{u_n^2}{2} - \pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc que
$$\frac{u_n^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi.$$
Or par opérations,
$$\frac{u_n^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi \Longrightarrow u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi \Longrightarrow \sqrt{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi} \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi}$$
(car $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et $2\pi \geq 0$).

    Ainsi, $\boxed{\text{on peut conjecturer que } K = \sqrt{2\pi}.}$

Exercice 2

1. On calcule : $u_0 = 1 + 1 = 2$, $u_1 = 2 \times \frac{3}{2} = 3$, $u_2 = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.
2. D'après la formule :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times (1 + \frac{1}{2^{n+1}}).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   u_n est strictement positif comme produit de réels strictement positifs. De plus :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$$
   donc ($u_n > 0$) on a $u_{n+1} > u_n$.

   Ainsi, la suite u est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n > 0$ donc d'après les propriétés du logarithme :
$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}).$$
   Par concavité du logarithme,
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$$
   donc par sommation d'inégalités :
$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$$
   (car on reconnait une somme géométrique).

   On a donc bien :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leq 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}).$$

5. D'après la question précédente,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \leq 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \leq 2$$
   donc par croissance de l'exponentielle :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e^2$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est majorée par e^2.

6. La suite $(u_n)_n$ est majorée d'après la question précédente, et croissante d'après la question 3. D'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ converge. Notons l sa limite.

   On avait $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e^2$ donc par passage conservation des inégalités larges par passage à la limite, $l \leq e^2$. De plus, (u_n) est croissante et $u_0 = 2$ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 = u_0 \leq u_n.$$
   Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, $2 \leq l$.

   On a donc bien montré $l \in [2, e^2]$.

7.
```python
def U(n):
    P=1
    for i in range(n+1):
    P=P*(1+1/2**i)
    return(P)
```

8. La suite (u_n) converge vers l et $l \neq 0$ car $l \geq 2$, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}).$$
   Alors, $S_n = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1 + \frac{1}{2^k})\right) = \ln(u_n)$.

De plus, u_n converge vers l et $l \in [2, e^2] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc la fonction ln est continue en l. Il vient alors :

$$S_n = \ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(l).$$

On a bien montré que la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + \frac{1}{2^n})$ converge par convergence de ses sommes partielles, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^n}) = \ln(l).$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles pour les sommes de séries (dont l'existence est prouvée question précédente) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k}) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k})$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k}) = \ln(l)$ et :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + \frac{1}{2^k}) = S_n = \ln(u_n).$$

On a donc $\ln(l) - \ln(u_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k})$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{l}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k}).$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{2^k}$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, et par concavité du logarithme:

$$\forall k \geq n+1, \ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$$

donc par comparaison :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Mais :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-(n+1)}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

par somme d'une série géométrique.

On a donc bien :

$$\ln(\frac{l}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n}.$$

De plus, $(u_k)_k$ est croissante et converge vers l donc $\frac{l}{u_n} \geq 1$ d'où $\ln(\frac{l}{u_n}) \geq 0$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(\frac{l}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de (u_n), $u_n \leq l$ donc $0 \leq l - u_n$.

    D'après la question précédente, $\ln(\frac{l}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}$. Or,

$$\begin{aligned}
\ln(\frac{l}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n} &\implies \frac{l}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}} && \text{par croissance de l'exponentielle} \\
&\implies le^{-\frac{1}{2^n}} \leq u_n && \text{par positivité de } u_n \text{ et } e^{-\frac{1}{2^n}} \\
&\implies l - u_n - l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq 0 \\
&\implies l - u_n \leq l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})
\end{aligned}$$

    On a donc bien montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}).$$

13. Question classique déjà posée (appliquer l'inégalité de convexité de l'exponentielle à $-x$).

14. D'après la question précédente,

$$(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{1}{2^n}$$

    donc par positivité de l:

$$l(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{l}{2^n}$$

    ce qui permet de conclure avec la question 12.

15. La série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{l}{2^n}$ est convergente comme produit de la série géométrique convergente $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ par le réel l, donc on peut utiliser le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs avec l'inégalité de la question précédente pour déduire que la série $\sum\limits_{n \geq 0} l - u_n$ converge.