

TP de révisions numéro 1

Semaine du jeudi 12 mars.

Exercice 1. Calculer $\sum_{k=1}^{100} k^2$ à l'aide d'une boucle.

On pourra ensuite vérifier à l'aide d'une formule connue que le résultat est correct.

Exercice 2. Évaluer $s = \sum_{k=930}^{945} \frac{1}{k}$, ainsi que $t = \ln\left(\frac{946}{930}\right)$ puis $u = t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{930} + \frac{1}{945} \right)$. Comparer.

Exercice 3. Calculer la somme des entiers $k \in \llbracket 100; 1000 \rrbracket$ tels que $k^2 + 2k + 1$ est divisible par 42.

Exercice 4. Compter le nombre de $i \in \llbracket 0, 5000 \rrbracket$ tels que $\sum_{j=0}^i j^4$ est divisible par 17.

Exercice 5. Définir en Python la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2$

Exercice 6. Définir en Python la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 10 \\ 5x - 40 & \text{si } 10 < x \leq 20 \\ -3x + 120 & \text{sinon} \end{cases}$

Représenter son graphe sur $[-10, 40]$.

Exercice 7. Écrire une fonction calculant la factorielle d'un entier donné en paramètre.

Exercice 8. La suite de Fibonacci est définie par ses deux premiers termes et une relation de récurrence d'ordre deux :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Écrire une fonction prenant en entrée un entier $n \geq 0$ et renvoyant f_n .

Que vaut f_{30} ? Et f_{100} ?

Représenter graphiquement les 25 premiers termes de cette suite.

Exercice 9. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de Syracuse issue de n est définie par son premier terme $u_0 = n$, et la relation de récurrence :

$$u_{k+1} = \begin{cases} \frac{u_k}{2} & \text{si } u_k \text{ est pair} \\ 3u_k + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une conjecture célèbre dit que quelque soit $n \geq 1$, la suite va atteindre 1, et ensuite cycler :

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$$

1. Écrire une fonction, disons `syracuse`, prenant en entrée un entier $n \geq 1$ et renvoyant le premier entier k tel que $u_k = 1$.
2. Que vaut `syracuse(127)` ?
3. Quel est le maximum des `syracuse(n)`, pour n décrivant $\llbracket 1; 100 \rrbracket$?

Exercice 10. Créer (en une seule ligne) :

- la liste des entiers positifs impairs majorés par 30 ;
- la liste constituée des carrés des entiers précédents ;
- celle constituée des éléments de la liste précédente dont le reste par la division euclidienne par 12 est 1 ;
- celle constituée de 5 listes elles-mêmes constituées de 4 entiers telle que $t_4[i][j] = 2^i(2j + 1)$.

Exercice 11. Écrire des fonctions prenant en entrée une liste d'entiers (ou flottants), et retournant respectivement :

- la somme des éléments de la liste ;
- leur produit ;
- leur maximum ;
- le premier indice correspondant à ce maximum.

Pour les tests, en notant t_1 la première liste de l'exercice précédent.

Exercice 12. Écrire une fonction calculant le nombre d'inversions d'une liste (disons t), c'est-à-dire le nombre de couples (i, j) tels que $0 \leq i < j < |t|$ et $t[j] < t[i]$.

Exercice 13. Avec des `append` successifs, construire la liste t de longueur 11 telle que $t_0 = 1$, et pour tout $j \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, $t_j = \sum_{i=0}^{j-1} (i+1)t_j$.

Exercice 14. Écrire une fonction calculant le triangle de Pascal à un ordre donné, en ne faisant que des additions.

Exercice 15. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = (i-j)^4$.

1. Définir A en une seule ligne.
2. Calculer A^3 ainsi que A^{-1} .

3. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.