

## Correction du DS n°5

**Exercice 1** *ESCP 2021, option technologique*

1. (a) On a  $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$  donc par composition  $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Ainsi, par produit,

$$f(x) = xe^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . Comme  $f(0) = 0$ ,  $f$  est continue à droite en 0.

- (b) Pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{f(x)}{x} = e^{-1/x}$$

Or  $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$  et par composition  $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$

Comme  $f(0) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Ainsi,  $f$  est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0$ .

2. (a) Les fonctions  $f$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto xe^{-1/x} \end{cases}$  coïncident sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or, la fonction  $g$  est dérivable sur son domaine de définition en tant que composée et produit de fonctions qui le sont. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$g'(x) = 1 \times e^{-1/x} + x \times \left( \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \right) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-1/x}$$

On en déduit alors que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f'(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-1/x}$$

- (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{1}{x} > 0$  d'où  $1 + \frac{1}{x} > 0$ . Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f'(x) > 0$ . On en déduit que la fonction  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$  sauf en un nombre fini de points (en 0), donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

- (c) On a  $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc par continuité de la fonction exponentielle,  $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ . Et enfin, par produit :  $xe^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Il vient  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

On obtient le tableau de variations :

|     |   |           |
|-----|---|-----------|
| $x$ | 0 | $+\infty$ |
| $f$ | 0 | $+\infty$ |

- (d) Montrons que  $f$  est deux fois dérivable en 0. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

Or,  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  et d'après le théorème des croissances comparées,

$$Xe^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad X^2 e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par composition :

$$\frac{1}{x}e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0, \quad \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{puis} \quad \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

On en déduit que  $f'$  est dérivable en 0 (à droite). Donc  $f$  est deux fois dérivable en 0 et  $f''(0) = 0$ .

(e) Les fonctions  $f'$  et  $h$  :  $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \end{cases}$  coïncident sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or, la fonction  $h$  est dérivable sur son domaine de définition en tant que composée et produit de fonctions qui le sont. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times e^{-1/x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{1}{x^2} e^{-1/x}\right) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x}$$

On en déduit alors que  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x}$$

Par stricte positivité de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f''(x) > 0$ .

On en déduit que la fonction  $f''$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. (a) Pour tout  $u \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{e^{-u} - 1}{u} = -\frac{e^{-u} - 1}{-u}$$

D'une part,  $-u \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} 0$

D'autre part, la fonction exponentielle étant dérivable en 0,  $\frac{e^X - 1}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} \exp'(0) = 1$

Par composition,  $\frac{e^{-u} - 1}{-u} \xrightarrow{u \rightarrow 0^+} 1$  puis  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = -1$

(b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(x) - (x + 1) = x(e^{-1/x} - 1) + 1 = \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} + 1$$

Or,  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$ . D'après la question précédente, on obtient par composition :

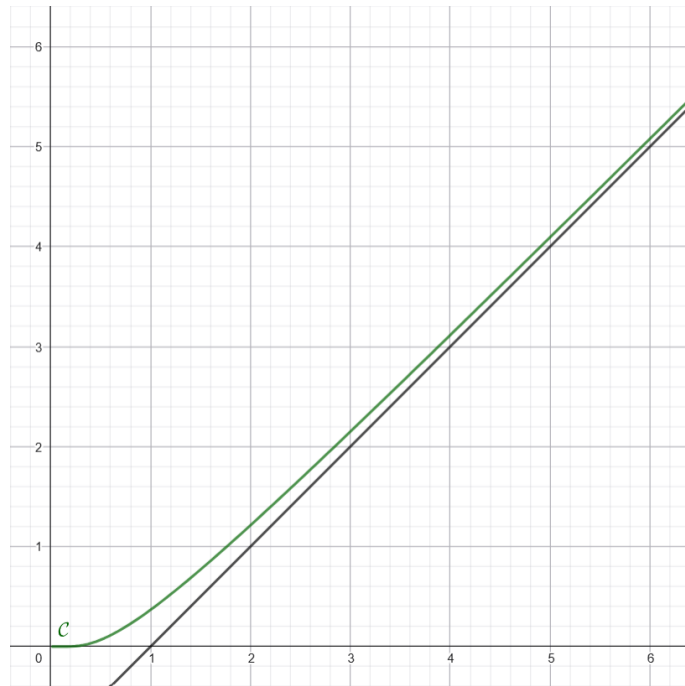
$$\frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$$

puis par somme

$$f(x) - (x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(c) D'après la question précédente,

la courbe  $(\mathcal{C})$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$  d'équation  $y = x - 1$ .



(a) Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : "u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0"$$

- **Initialisation** :  $u_0 = 1 > 0$  donc  $H(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $H(n)$  et montrons  $H(n+1)$ .  
D'après  $H(n)$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ . Donc,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie. De plus, par stricte croissance de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0$ . Ce qui montre  $H(n+1)$  et achève l'hérédité.
- **Conclusion** : On a montré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$

(b) Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $u_n > 0$ , on a

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n e^{-1/u_n} - u_n = u_n (e^{-1/u_n} - 1)$$

Or  $-1/u_n < 0$  donc par croissance de la fonction exponentielle, on a  $e^{-1/u_n} \leq e^0 = 1$ .  
Il vient  $e^{-1/u_n} - 1 \leq 0$  puis  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

(c) Avec les deux questions précédentes, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

On note  $\ell$  sa limite. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ , on a  $\ell \geq 0$  par préservation des inégalités larges par passage à la limite. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

D'une part,  $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

D'autre part, par continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  (car dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ), on a  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\ell)$ .

Par unicité de la limite :  $f(\ell) = \ell$

Montrons par l'absurde que  $\ell = 0$ . Supposons alors que  $\ell > 0$ . On a donc  $\ell e^{-1/\ell} = \ell$  d'où  $e^{-1/\ell} = 1$ .  
En appliquant la fonction logarithme,  $-1/\ell = 0$ , ce qui absurde.

Par conséquent,  $\ell = 0$ . D'où,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

(d)

```

1   n = 0
2   u = 1
3   while u > 0.001 :
4       u = u*np.exp(-1/u)
5       n = n+1
6   print(n)

```

4. (a) On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\ln(u_{k+1}) = \ln(u_k e^{-1/u_k}) = \ln(u_k) + \ln(e^{-1/u_k}) = \ln(u_k) - \frac{1}{u_k}$$

d'où

$$\frac{1}{u_k} = \ln(u_k) - \ln(u_{k+1})$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On somme ces égalités pour  $k$  allant de 0 à  $n$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^n \ln(u_k) - \ln(u_{k+1})$$

Par télescope,  $\sum_{k=0}^n \ln(u_k) - \ln(u_{k+1}) = \ln(u_0) - \ln(u_{n+1}) = -\ln(u_{n+1})$ . Il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$$

On a  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et par composition  $-\ln(u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Il vient  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ainsi, la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{u_k}$  diverge.

### Exercice 2 EDHEC 2023

1. On pose  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{2}x \end{cases}$ . Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2}|x - y|$$

Ainsi,  $K = \frac{1}{2}$  convient.

2. Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $\epsilon > 0$ . On pose  $\delta = \epsilon/K$ . Alors pour tout  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $|x - y| \leq \delta$ , on a,

$$|f(x) - f(y)| \leq K \times |x - y| \leq K \times \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$$

Donc  $f$  est continue en  $x$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Par l'absurde, supposons que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins deux solutions. On note  $x_1$  et  $x_2$  deux solutions distinctes. Alors, avec (★),

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K \times |x_1 - x_2|$$

Or, par définition de  $x_1$  et  $x_2$ ,  $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$ . D'où

$$|x_1 - x_2| \leq K|x_1 - x_2|$$

Il vient

$$(1 - K)|x_1 - x_2| \leq 0$$

C'est absurde car  $1 - K > 0$  et  $|x_1 - x_2| > 0$ . Ainsi, l'équation  $f(x) = x$  admet au plus une solution.

4. (a) Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : |u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|$$

• **Initialisation** :  $|u_1 - u_0| = K^0 |u_1 - u_0|$ , ce qui montre  $H(0)$ .

• **Hérédité** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $H(n)$  et montrons  $H(n+1)$ . En utilisant (★) et  $H(n)$ ,

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K \times |u_{n+1} - u_n| \leq K \times K^n \times |u_1 - u_0| = K^{n+1} |u_1 - u_0|$$

Ce qui montre  $H(n+1)$  et achève l'hérédité.

• **Conclusion** : On a montré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|$

(b) Comme  $K \in ]0, 1[$ , la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} K^n$  converge.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|$ .
- Les séries  $\sum_{n \geq 0} K^n |u_1 - u_0|$  et  $\sum_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n|$  sont à termes positifs.
- Par linéarité, la série  $\sum_{n \geq 0} K^n |u_1 - u_0|$  converge.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n|$  converge.

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  converge absolument donc converge.

C'est une série télescopique de terme général  $u_{n+1} - u_n$  et elle converge donc

la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

(c) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

D'une part,  $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$

D'autre part, par continuité de  $f$ ,  $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$

Par unicité de la limite :  $f(a) = a$ .

Ainsi, l'équation  $f(x) = x$  admet une solution. De plus, d'après la question 3,

L'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution.

5. (a) D'après la question 4.a), on a pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{i+1} - u_i| \leq K^i \times |u_1 - u_0|$   
En sommant ces inégalités pour  $i$  allant de  $n$  à  $n+p-1$ , on obtient

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$$

(b) Par télescopage, on a

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) = u_{n+p} - u_n$$

Donc en utilisant l'inégalité triangulaire et la question précédente,

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) \right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0| = \left( \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \right) \times |u_1 - u_0|$$

Or, en reconnaissant une somme géométrique de raison  $K \neq 1$ , on a

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i = K^n \times \sum_{i=n}^{n+p-1} K^{i-n} = K^n \times \sum_{j=0}^{p-1} K^j = K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K}$$

Ainsi,  $|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0|$

(c) On va utiliser l'inégalité précédente et on va faire tendre  $p$  vers  $+\infty$ .

D'une part, par continuité de la fonction valeur absolue,  $|u_{n+p} - u_n| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} |a - u_n|$ .

D'autre part,  $K^p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  car  $K \in ]0, 1[$ . Par somme et produit,

$$K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|$$

Par préservation des inégalités larges par passage à la limite,

$$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|$$

6. (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^t > 0$  donc  $1 + e^t > 0$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  comme inverse d'une fonction de classe  $C^2$  qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$$

puis

$$f''(t) = -\frac{e^t \times (1+e^t)^2 - e^t \times 2 \times e^t(1+e^t)}{(1+e^t)^4} = -\frac{(1+e^t-2e^t)e^t}{(1+e^t)^3}$$

d'où

$$f''(t) = \frac{(e^t-1)e^t}{(1+e^t)^3}$$

- (b) Comme pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $1 + e^t > 0$  et  $e^t > 0$ ,  $f''(t)$  est du signe de  $e^t - 1$ . Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , par stricte croissance de la fonction logarithme

$$e^t - 1 > 0 \iff e^t > 1 \iff t > 0$$

On a alors le tableau de variations suivant :

|          |           |                |            |
|----------|-----------|----------------|------------|
| $x$      | $-\infty$ | $0$            | $+\infty$  |
| $f''(x)$ |           | $-$            | $+$        |
| $f'$     | $0$       | $\searrow$     | $\nearrow$ |
|          |           | $-\frac{1}{4}$ | $0$        |

Justification des limites :

- en  $+\infty$  : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(t) = -\frac{e^t}{e^{2t}} \frac{1}{(1+e^{-t})^2} = -e^{-t} \times \frac{1}{(1+e^{-t})^2}$$

donc, comme  $e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , par opérations sur les limites,  $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

- en  $-\infty$  : comme  $e^t \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$ , par opérations sur les limites,  $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$

D'après le tableau de variations, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$$

- (c) D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$$

Ceci montre que  $f$  est  $\frac{1}{4}$ -contractante.

- (d) D'après la question 4.b), la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

(e)

```

1 def suite(n) :
2     u = 0
3     for k in range(1, n+1) :
4         u = 1 / (1+np.exp(u))
5     return u

```

- (f) En utilisant la question 5.c), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|a - u_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \times |u_1 - u_0| = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4^n} \times |u_1 - u_0|$$

Or,  $u_0 = 0$  et  $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a - u_n| \leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n}$  et alors

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4^n} < 10^{-3} \iff \frac{2}{3} \times 10^3 < 4^n \iff 4^n > \frac{2000}{3}$$

Par conséquent, dès que  $n$  vérifie  $4^n > \frac{2000}{3}$ , on a  $|a - u_n| < 10^{-3}$ , c'est-à-dire que  $u_n$  est une valeur approchée de  $a$  à moins de  $10^{-3}$  près.

(g)

```

1  n = 0
2  while 4**n <= 2000/3 :
3      n = n+1
4  print(suite(n))

```

### Exercice 3

1. (a) C'est la matrice  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donnée par :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{s_i, s_j\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , le coefficient d'indice  $(i,j)$  de la matrice  $M^k$  est le nombre de chaînes de longueur  $k$  de  $G$  de  $s_i$  vers  $s_j$ .

(c) Soit  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Supposons que les sommets  $s_i$  et  $s_j$  sont reliés par une chaîne. On dispose alors d'une chaîne  $\mathcal{C}$  entre  $s_i$  et  $s_j$  de longueur minimale, disons  $p$ . Montrons que  $p \leq n-1$ . Par l'absurde, supposons que  $p > n-1$ . Alors, la chaîne  $\mathcal{C}$  passe par au moins par  $n+1$  sommets : elle passe donc deux fois par le même sommet, disons  $s$ . Ainsi, on peut décrire la chaîne de la façon suivante :

$$s_i - \dots - s - \dots - s - \dots - s_j$$

En supprimant la boucle issue partant de  $s$ , on obtient une chaîne entre  $s_i$  et  $s_j$  plus courte que  $\mathcal{C}$ . Cela contredit la minimalité de  $\mathcal{C}$ , ce qui est absurde. On a donc  $p \leq n-1$ . Par conséquent, on dispose d'une chaîne entre  $s_i$  et  $s_j$  de longueur au plus  $n-1$ .

2. On a  $S = \llbracket 2, 7 \rrbracket$  et  $A = \{\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$

3. (a) On a  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b)

```

1  def K(n):
2      return np.ones((n,n)) - np.eye(n)

```

(c) Par calcul direct,

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J$$

Montrons par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H(k) : \text{'' } J^k = 4^{k-1} J \text{''}$$

• Initialisation :  $4^{1-1} J = J$  donc  $H(1)$  est vrai.

• Hérédité : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $H(k)$  et montrons  $H(k+1)$ . D'après  $H(k)$ , et comme  $J^2 = 4J$ , on a

$$J^{k+1} = J^k \times J = 4^{k-1} J \times J = 4^{k-1} J^2 = 4^{k-1} \times 4J = 4^k J$$

Ce qui montre  $H(k+1)$  et achève l'hérédité.

- Conclusion : On a montré par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $J^k = 4^{k-1}J$ . Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, J^k = \begin{cases} 4^{k-1}J & \text{si } k \geq 1 \\ I_4 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

(d) Par calcul direct,  $M = J - I_4$

(e) Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si  $k = 0$ ,  $M^k = I_4$ . Sinon, comme  $J$  et  $I_4$  commutent, on a, d'après le binôme de Newton,

$$M^k = (J - I_4)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} J^j \times (-I_4)^{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} J^j = \binom{k}{0} (-1)^k I_4 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} J^j$$

Par la question 3.c) et par distributivité de la multiplication par un scalaire sur l'addition matricielle,

$$\begin{aligned} M^k &= (-1)^k I_4 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \times 4^{j-1} J \\ &= (-1)^k I_4 + \left( \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \times 4^{j-1} \right) J \\ &= (-1)^k I_4 + \left( \frac{1}{4} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \times 4^j \right) J \\ &= (-1)^k I_4 + \frac{1}{4} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \times 4^j - (-1)^k \right) J \end{aligned}$$

Et d'après le binôme de Newton,

$$M^k = (-1)^k I_4 + \frac{1}{4} ((4 + (-1))^k - (-1)^k) J = (-1)^k I_4 + \frac{1}{4} (3^k - (-1)^k) J$$

Il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, M^k = \begin{cases} (-1)^k I_4 + \frac{1}{4} (3^k - (-1)^k) J & \text{si } k \geq 1 \\ I_4 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

4.

```

1 def degre(M, i):
2     d = 0
3     n, p = np.shape(M)
4     for j in range(p):
5         d += M[i, j]
6     return(d)

```

5.

```

1 def listeDegMax(M):
2     n, p = np.shape(M)
3     listeDeg = [degre(M, i) for i in range(n)]
4     degmax = listeDeg[0]
5     for d in listeDeg:
6         if d > degmax:
7             degmax = d
8     L = []
9     for i in range(n):
10        if listeDeg[i] == degmax:
11            L.append(i)
12    return(L)

```

6. L'ensemble  $\{6, 7\}$  est un ensemble de sommets dominant car les sommets 2, 3, 5 sont voisins du sommet 6 et le sommet 4 est voisin du sommet 7.

Il est minimal, car sinon il existerait un ensemble dominant de cardinal 1 : ce qui n'est pas le cas puisqu'aucun sommet n'est voisin de tous les autres sommets.

7.

```

1  def estVoisin(M,i,j):
2      if M[i,j] == 1:
3          return True
4      return False

```

8. La fonction `Mystere` renvoie `True` si le sommet  $n^{\circ}j$  fait partie de l'ensemble  $A$  ou est voisin avec un sommet de l'ensemble  $A$ , et renvoie `False` sinon.

9.

```

1  def estDominant(M,A):
2      n,p = np.shape(M)
3      for j in range(n):
4          if not(Mystere(M,j,A)):
5              return False
6      return True

```

10.

```

1  def minimiseDominant(M,A):
2      for i in range(len(A)):
3          L=A.copy()
4          del L[i]
5          if estDominant(M,L):
6              return(L)
7      return False

```

11. Ce code permet d'afficher un ensemble de sommets dominant minimal

L2 : L est la liste des sommets du graphe  $G$  : cet ensemble de sommet est dominant.

L3 : le code vérifie si l'ensemble des sommets de L est minimal en vérifiant si l'on peut retirer un sommet

L4 : si ce n'est pas le cas, on retire un sommet de telle sorte que l'ensemble des sommets restants est encore dominant

L5 : On affiche cette liste représentant un ensemble de sommets dominant minimal.

12. (a) On calcule :  $D(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

- (b) Fixons  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Alors pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $j \neq i$ , on a  $d(i, j) \geq 1$  donc  $0 \leq \frac{1}{d(i, j)} \leq 1$  par décroissance et positivité de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$  et en utilisant la convention  $\frac{1}{+\infty} = 0$ . Par conséquent, en sommant ces inégalités pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \{i\}$ ,

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} 0 \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{1}{d(i, j)} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} 1$$

d'où  $0 \leq D(i) \leq n-1$

- (c) • Supposons que  $D(i) = 0$ . Comme  $D(i)$  est une somme de réels positifs, on a pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $j \neq i$ ,  $\frac{1}{d(i, j)} = 0$ , donc par convention  $d(i, j) = +\infty$ . On en déduit que le sommet  $i$  n'est relié à aucun autre sommet : le sommet  $i$  est isolé.

- Supposons que  $D(i) = n - 1$  donc

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} 1 - \frac{1}{d(i,j)} = 0$$

Or, d'après la question précédente, c'est une somme de réels positifs. Ainsi, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $j \neq i$ , on a  $1 - \frac{1}{d(i,j)} = 0$  donc  $d(i,j) = 1$ .

On en déduit que le sommet  $i$  est voisin avec tous les autres sommets.

(d) Distinguons deux cas :

**Cas 1 :**  $k$  n'est pas relié à  $i$  ou  $j$  par une chaîne.

Dans ce cas, l'inégalité voulue est triviale car  $d(i,k) + d(j,k) = +\infty$ .

**Cas 2 :**  $k$  est relié à  $i$  et à  $j$  par une chaîne.

En particulier,  $i$  et  $j$  sont reliés par une chaîne passant par le sommet  $k$ .

Soient  $c$  une chaîne de longueur minimale de  $i$  à  $k$  et  $c'$  une chaîne de longueur minimale de  $k$  à  $j$ . Par définition,  $d(i,k)$  est la longueur de  $c$  et  $d(k,j)$  est la longueur de  $c'$

Considérons la concaténation ("chaîne obtenue en mettant bout à bout") de  $c$  et de  $c'$  : c'est une chaîne de longueur  $d(i,k) + d(k,j)$  reliant  $i$  et  $j$ .

Par définition de  $d(i,j)$ ,  $d(i,j)$  est inférieur à la longueur de cette chaîne, donc  $d(i,j) \leq d(i,k) + d(k,j)$

Donc dans tous les cas,  $d(i,j) \leq d(i,k) + d(k,j)$

13.

```

1 import numpy.linalg as al
2 def dist(M,i,j):
3     n,p = np.shape(M)
4     for k in range(n):
5         Mk = al.matrix_power(M,k)
6         if Mk[i,j] >= 1:
7             return(k)
8     return(-1)

```

14.

```

1 def D(M,i):
2     n,p = np.shape(M)
3     S = 0
4     for j in range(n):
5         d = dist(M,i,j)
6         if j != i and d != -1:
7             S += 1/d
8     return(S)

```

15.

```

1 def ClassementCentralite(M):
2     n,p = np.shape(M)
3     Lsom = [i for i in range(n)]
4     Ldeg = [D(M,i) for i in Lsom]
5     for j in range(n-1):
6         for i in range(n-1):
7             if Ldeg[i] < Ldeg[i+1]:
8                 Ldeg[i],Ldeg[i+1] = Ldeg[i+1],Ldeg[i]
9                 Lsom[i],Lsom[i+1] = Lsom[i+1],Lsom[i]
10    return(Lsom)

```

16.  $\{3, 6, 7\}$  est une clique de  $G_1$ . On remarque que la matrice d'adjacence du sous graphe induit par cette clique est :  $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . C'est la matrice d'adjacence associée au graphe complet d'ordre 3.

17.

```

1  def gardeLignes(M,L):
2      n = len(L)
3      for j in range(n-1):
4          for i in range(n-1):
5              if L[i] > L[i+1]:
6                  L[i],L[i+1] = L[i+1],L[i]
7
8      Garde=[]
9      for i in L:
10         Garde.append(M[i,:])
11     return(np.array(Garde))

```

18.

```

1  def gardeColonnes(M,L):
2      A = gardeLignes(np.transpose(M),L)
3      return(np.transpose(A))

```

19.

```

1  def sousMatrice(M,L):
2      R = gardeLignes(M,L)
3      R = gardeColonnes(R,L)
4      return(R)

```

20.

```

1  def verifieClique(M,L):
2      S = sousMatrice(M,L)
3      n = len(L)
4      if (S==K(n)).all():
5          return True
6      return False

```