

Programme de colle n° 22 : Espaces vectoriels.

Semaine du lundi 23 mars.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

E désigne toujours un espace vectoriel donné par $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour un certain entier n .

Début du chapitre

22.1 Se reporter au programme de colle précédent.

22.2 Famille de vecteurs de E . Base de E . Base canonique de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Méthode pour déterminer si une famille donnée est une base de E . Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Sous-espaces vectoriels

22.3 Notion de sous-espace vectoriel. Caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels. Stabilité par combinaison linéaire de tout sous-espace vectoriel.

22.4 L'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

22.5 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de E , $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Caractérisation des inclusions type $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subset F$ où F est un sous-espace vectoriel de E .

22.6 Base d'un sous-espace vectoriel. Proposition : S'il existe p tel que $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_k)$ alors :

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_k)$.

Sinon, $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Exemples d'utilisations.

22.7 Notion de famille libre, de famille liée. Caractérisation des familles libres. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. $(u_1, \dots, u_k)$ est libre si et seulement si $u_p \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_l)$.

Python

22.8 Statistiques descriptives univariées : Population, échantillon, variable statistique quantitative discrète. Série statistique brute. Modalités, effectif, fréquence. Série statistique dépouillée. Effectifs cumulés, fréquences cumulées.

Quelques questions de cours

1. La colle commencera obligatoirement par une question de cours Python des 10 premiers PC (PC01 à PC10) ou de ce PC.
2. Définir la notion de base d'un espace vectoriel E . Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) donnée par $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Définir la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer (dans l'un de ces cas) que la famille donnée est bien une base de l'espace vectoriel considéré. Montrer que toute famille de vecteurs de E contenant le vecteur 0_E n'est pas une base de E .
4. Définir la notion de sous-espace vectoriel. Énoncer la caractérisation en trois points des sous-espaces vectoriels. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
5. Énoncer et démontrer la proposition (30) relative à la stabilité par combinaison linéaire de tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel.
6. Que dire de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel? Le démontrer, puis montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
7. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notation $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.
8. Définir la notion de base d'un sous-espace vectoriel. Déterminer une base de l'ensemble des solutions de l'équation $x + y + z = 0$.
9. Énoncer et démontrer la proposition (44) donnant une condition pour qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_k)$ soit une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

10. Définir la notion de famille libre. Énoncer et démontrer la proposition (48) donnant une caractérisation des familles libres.
11. Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de E . Montrer l'équivalence entre :
 - $\forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, u_p \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, \dots, u_k)$, et
 - $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.
12. Écrire une fonction `Depouille` prenant en entrée une série statistique brute (sous forme de liste) et renvoyant en sortie la série statistique dépouillée obtenue en dépouillant celle-ci.
13. Écrire un code Python permettant, étant donné une série statistique brute L supposée définie au préalable, de définir les modalités, les effectifs, les fréquences, les effectifs cumulés et les fréquences cumulées de cette série statistique. On rappellera la définition de certaines de ces notions (au choix de l'interrogation).