Programme de colle n^o 5 : Suites réelles.

*Semaine du lundi **16 octobre**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Généralités sur les suites réelles

5.1 Notion de suite réelle indexée par une partie E de $\mathbb{N}$. Exemples de données d'une suite par une formule, par la donnée d'une relation de récurrence et de termes initiaux, par définition de manière "implicite". Graphe d'une suite. Tracé des termes d'une suite donnée par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide du graphe de f. Remarque sur la notion de point fixe.

La notion de point fixe est hors programme en première année, les élèves doivent à ce stade seulement avoir compris qu'ils ont une importance dans le tracé mentionné.

5.2 Suites majorées, minorées, bornées. u est bornée ssi $(|u_n|)_n$ est majorée.

5.3 Suites monotones, strictement monotones, constantes. Exemples d'étude de monotonie.

En cas d'exercice sur la notion de suite périodique, on définira cette notion en début d'énoncé.

Suites remarquables

5.4 Suites arithmétiques : définition, raison, expression du terme général. Sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

5.5 Suites géométriques : définition, raison, expression du terme général. Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique.

5.6 Suites arithmético-géométriques : définition. Calcul du terme général à l'aide d'un changement de suite.

5.7 Relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (à coefficients constants). Équation caractéristique d'une telle relation de récurrence, une suite géométrique non nulle de raison q vérifie une telle relation de récurrence ssi q est solution de son équation caractéristique. Théorème (44) de calcul du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

5.8 Démonstration du théorème 44 : Si u et v vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants ici) et ont les même deux premiers termes, alors elles sont égales. Stabilité de l'ensemble des suites vérifiant une telle relation par combinaison linéaire. Les suites "données par le théorème" vérifient bien la relation de récurrence linéaire considérée. Démonstration du théorème à l'aide de ces propositions.

Quelques questions de cours

1. On considère la suite u donnée par $u_0 = 1-e$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \ln(1-u_n)$. Quel est l'ensemble d'indexation de u? Même question pour la suite v donnée par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n(1-v_n)}$.
2. Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution positive, notée u_n, pour tout entier n. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
3. Placer, à l'aide d'un tracé de graphe bien choisi, les 3 premiers termes de la suite donnée par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$. Montrer que u_n est bien défini pour tout entier n.
4. Définir la notion de suite arithmétique. Énoncer et démontrer la proposition permettant de calculer le terme général d'une telle suite.
5. Énoncer et démontrer la proposition permettant de calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
6. Énoncer et démontrer la proposition permettant de calculer le terme général d'une suite géométrique. Énoncer la proposition permettant de calculer la somme de termes consécutifs d'une telle suite.
7. Définir la notion de suite arithmético-géométrique. Calculer le terme général de la suite u donnée par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$.
8. Démontrer qu'une suite géométrique de raison q vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ssi q est solution de son équation caractéristique.
9. Énoncer le théorème permettant de calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
10. Écrire un code `Python` définissant une fonction `estCarre` prenant en entrée un entier naturel `n` et renvoyant `True` si `n` est le carré d'un entier, et `False` sinon.