

## Correction du DM n°5

**Exercice 1**

1.

```

1  def Stats(Inv,Objet) :
2      for ob in Inv :
3          if ob[0]==Objet :
4              return([ob[1],ob[2]])

```

2.

```

1  def Verif(C,Inv,L) :
2      VolObjets=0
3      for Nom_objet in L :
4          volume=Stats(Inv,Nom_objet)[0]
5          VolObjets += volume
6      return(VolObjets<=C)

```

3.

```

1  def Depasse(C,Inv,L,Val) :
2      if not(Verif(C,Inv,L)) :
3          return(False)
4      ValTot = 0
5      for Nom_objet in L :
6          valeur = Stats(Inv,Nom_objet)[1]
7          ValTot += valeur
8      return(ValTot>=Val)

```

4. **Pour S1**, l'ordre retenu est : Chocolat, LivreMaths, Serviette, Cafe, Casque.

On garde alors : Chocolat, puis LivreMaths, puis Café.

Valeur totale : 1690.

**Pour S2**, l'ordre retenu est : Chocolat (v/m = 1800), Cafe (v/m=90), Casque (40), LivreMaths (35), Serviette (20).

On garde alors : Chocolat, puis Café, puis Casque, puis Serviette.

Valeur totale : 1130.

5.

```

1  def Tri2(Inv):
2      for i in range(len(Inv)-1) :
3          for j in range(len(Inv)-1) :
4              rj = Inv[j][2]/Inv[j][1]
5              rj1 = Inv[j+1][2]/Inv[j+1][1]
6              if rj>rj1 :
7                  Inv[j],Inv[j+1] = Inv[j+1],Inv[j]
8      return(Inv)

```

6.

```

1  def Glouton2(C,Inv) :
2      Inv=Tri2(Inv)
3      VolRestant = C
4      Garde=[]
5      Valeur=0
6      for Objet in Inv :
7          if Objet[1] <= VolRestant :
8              Garde.append(Objet[0])
9              Valeur += Objet[2]
10             VolRestant = VolRestant - Objet[1]
11     return(Garde,Valeur)

```

7.

```

1  def ListeValeurs(Cmin,Cmax) :
2      Vals1,Vals2 = [],[]
3      for C in range(Cmin,Cmax+1) :
4          v1=Glouton1(C,Inventaire)[1]
5          Vals1.append(v1)
6          v2=Glouton2(C,Inventaire)[1]
7          Vals2.append(v2)
8      return([Vals1,Vals2])

```

8.

```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2  import numpy as np
3  X=np.arange(30,51)
4  Vals1=ListeValeurs(30,50)[0]
5  Vals2=ListeValeurs(30,50)[1]
6  plt.plot(X,Vals1,label="Stratégie S1")
7  plt.plot(X,Vals2,label="Stratégie S2")
8  plt.legend()
9  plt.show()

```

9. Les stratégies S1 et S2 ne sont pas systématiquement optimales. La prévalence de l'une sur l'autre dépend de tous les paramètres.

## Exercice 2

1. (a) A chaque partie, le joueur mise sur un nombre non nul de cases, qui sont toutes équiprobables, donc a une probabilité non nulle de gagner. Cette probabilité est de la forme  $\frac{K}{12}$ , où  $K$  est le nombre de cases sur lesquelles le joueur a misé à la  $n$ -ième partie.

Ainsi,  $p_n$  est non nul pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(b) Soit  $n \geq 1$ . Alors,  $\mathbb{P}(A_n) = p_n$  est non nul d'après la question précédente, donc  $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$  et  $\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$  sont bien définis.

De plus,  $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$  est la probabilité que le joueur gagne à la partie  $n+1$  sachant qu'il a gagné à la  $n$ -ième partie. D'après l'énoncé, dans ce cas, le joueur mise sur les nombres 1, 3 et 5 ce qui représente

3 secteurs sur les 12 secteurs équiprobables. On a donc  $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ .

Enfin,  $\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$  est la probabilité que le joueur gagne à la partie  $n+1$  sachant qu'il a perdu à la  $n$ -ième partie. D'après l'énoncé, dans ce cas, le joueur mise sur les nombres 1 et 2 ce qui représente

2 secteurs sur les 12 secteurs équiprobables. On a donc  $\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE  $(A_n, \bar{A}_n)$  :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\bar{A}_n)\mathbb{P}_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) \\
 &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) && (\text{car } \mathbb{P}(\bar{A}_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n)) \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)p_n + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

On a bien  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$ .

- (c) D'après la question précédente,  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmético-géométrique. Soit  $l \in \mathbb{R}$ .  $l = \frac{1}{12}l + \frac{1}{6} \iff l = \frac{2}{11}$ .

Ainsi,  $(p_n - \frac{2}{11})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique de raison  $\frac{1}{12}$ . Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n - \frac{2}{11} = (p_1 - \frac{2}{11}) \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

Or,  $p_1 = \frac{1}{12}$  d'après l'énoncé (le joueur ne mise que sur  $A$  à la première partie).

On en tire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{2}{11} - \frac{13}{132} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}. \text{ Enfin, } \left|\frac{1}{12}\right| < 1 \text{ donc } \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc par opérations :}$$

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{11}.$$

2.  $B_1$  est réalisé si et seulement si  $A_1$  est réalisé et les  $A_i$  ne sont pas réalisés pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

$$\text{Ainsi, } B_1 = A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n = A_1 \cap \bigcap_{i=2}^n \bar{A}_i.$$

3. L'événement  $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}$  est de probabilité non nul, car le joueur a une probabilité non nulle de gagner et de perdre à chaque étape. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(\bar{A}_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap \bar{A}_2}(\bar{A}_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}}(\bar{A}_n).$$

Or,  $\mathbb{P}_{A_1}(\bar{A}_2)$  est la probabilité que le joueur perde sachant qu'il a misé sur les nombres 1, 3 et 5 donc  $\mathbb{P}_{A_1}(\bar{A}_2) = \frac{3}{4}$ . De plus, pour tout  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}_{A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i)$  est la probabilité que le joueur perde la  $i$ -ième partie sachant qu'il a perdu la  $i-1$ -ième (les parties antérieures n'affectent pas son choix de secteurs) donc  $\mathbb{P}_{A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i) = \mathbb{P}_{\bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i) = \frac{5}{6}$ . Enfin,  $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{12}$ .

$$\text{Finalement, } \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{12} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$

4. De même, on a  $B_n = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n$ , et  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}$  est de probabilité non nulle, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\bar{A}_1) \mathbb{P}_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2) \dots \mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-2}}(\bar{A}_{n-1}) \mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}}(A_n).$$

Or,  $\mathbb{P}(\bar{A}_1) = \frac{11}{12}$  car le joueur ne mise que sur 1 à la première partie. De plus, pour tout  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i)$  est la probabilité que le joueur perde la  $i$ -ième partie sachant qu'il a perdu les précédentes, donc (seule la dernière partie détermine son choix)  $\mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i) = \frac{5}{6}$ , et enfin, de même,  $\mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{6}$ . Finalement :

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{11}{12} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$

5. Soit  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ . On raisonne de la même manière.

$$B_k = \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1} \cap \dots \cap \bar{A}_n$$

donc d'après la formule des probabilités composées (les événements écrits sont de probabilité non nulle) :

$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(\bar{A}_1) \left( \prod_{i=2}^{k-1} \mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i) \right) \mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1}}(A_k) \mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1}) \left( \prod_{i=k+2}^n \mathbb{P}_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{i-1}}(\bar{A}_i) \right)$$

puis

$$\mathbb{P}(B_l) = \frac{11}{12} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}$$

d'où :

$$\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}(B_k) = \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}.$$

6. Les événements  $B_1, \dots, B_n$  sont clairement incompatibles donc :

$$\begin{aligned} q_n = \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \\ &= \left(\frac{1}{16} + \frac{11}{72} + (n-2) \frac{11}{96} \times \frac{6}{5}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

ce qui donne, après simplification :

$$q_n = \left(\frac{31}{144} + (n-2) \frac{11}{80}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$

### Exercice 3

1. (a)  $\mathbb{R}$  est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{-x} e^{2x}}{(e^{-2x} + 1) e^{2x}} = f(x)$$

donc  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .

(b) La fonction  $x \mapsto e^{2x} + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  car, par positivité de l'exponentielle, elle est minorée par 1. Ainsi,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions de classes  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}.$$

Or,  $(e^{2x} + 1)^2 > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $e^x - e^{3x}$ . Par stricte croissante du logarithme :

$$e^x - e^{3x} \geq 0 \iff e^x \geq e^{3x} \iff x \geq 3x \iff 0 \geq 2x \iff x \leq 0$$

et  $e^x - e^{3x} = 0 \iff x = 3x \iff x = 0$ .

Finalement,  $f'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_-$ , s'annule en 0, et est strictement négative sur  $\mathbb{R}_+$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

(c) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) - x$ .  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme des fonctions  $f$  et  $x \mapsto -x$  strictement décroissantes sur  $\mathbb{R}_+$ .

De plus,  $g$  est continue comme somme de fonctions continues.

Enfin,  $g(0) = f(0) = \frac{1}{2}$ , et

$$f(x) = \frac{1}{e^x} \frac{1}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc par opérations,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

D'après le théorème de la bijection monotone,  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  vers  $] -\infty, \frac{1}{2} ]$ .

Or,  $0 \in ] -\infty, \frac{1}{2} ]$  donc  $\exists ! l \in \mathbb{R}_+, g(l) = 0$  d'où :

$\exists ! l \in \mathbb{R}_+, f(l) = l$ . Dans la suite, on note  $l$  l'unique réel positif tel que  $f(l) = l$ .

- (d) On a  $g(\frac{1}{2}) \leq 0 \iff \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1} \leq \frac{1}{2} \iff e^{1/2} \leq \frac{1}{2}(e+1)$ . Or, d'après les approximations données,  $e^{1/2} \simeq 1,65$  et  $\frac{1}{2}(e+1) \simeq \frac{1}{2}(3,71) > 1,8$ , donc la dernière inégalité est vraie.

Par équivalence, on a donc :

$$g(\frac{1}{2}) \leq g(l) = 0 \leq g(0) = \frac{1}{2}$$

donc par stricte décroissance de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$  :  $\boxed{0 \leq l \leq \frac{1}{2}}$ .

2. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . D'après 1(b), on a  $f'(x) = -\frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$  et  $\frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \geq 0$  comme quotient de réels positifs ( $x \geq 0 \implies 3x \geq x \implies e^{3x} \geq e^x$ ). Donc :

$$|f'(x)| = \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}.$$

Alors,  $f(x) > 0$  donc :

$$|f'(x)| \leq f(x) \iff \frac{|f'(x)|}{f(x)} \leq 1 \iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \leq 1 \iff e^{2x} - 1 \leq e^{2x} + 1 \iff -1 \leq 1/$$

La dernière inégalité est claire, ce qui démontre :

$$\boxed{\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x)}.$$

- (b)  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f(0) = \frac{1}{2}$  donc :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq \frac{1}{2}$ .

Ainsi, d'après la question précédente,  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$ .

- (c) Soit  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ . Par décroissance de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \implies f(\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(0).$$

Or,  $f(0) = \frac{1}{2}$  et  $f(\frac{1}{2})$  est positif comme quotient de réels positifs. On a donc :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve } f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]}.$$

3. Rédiger la récurrence classique à l'aide de la question 2c) et de  $u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après les questions 1(b) et 2(b),  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ . De plus, d'après la question précédente,  $u_n \in \mathbb{R}_+$  et par définition de  $l$ , on a  $l \in \mathbb{R}_+$ . D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(u_n) - f(l)| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|.$$

Or,  $f(l) = l$  et  $f(u_n) = u_{n+1}$ , on a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|}.$$

5. On montre l'inégalité voulue par récurrence sur  $\mathbb{N}$  à l'aide de la question précédente (le faire). Pour l'initialisation,

$$|u_0 - l| = |l| \leq \frac{1}{2}$$

d'après la 1(d).

6. On a  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - l| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  et  $\frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  car  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ , donc par encadrement,  $|u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  d'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l.}$$