

Programme de colle n° 23 : Espaces vectoriels (fin), intégrales des fonctions continues sur un segment.

Semaine du lundi 30 mars.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Espaces vectoriels (fin)

23.1 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. Une famille est une base d'un sous-espace F ssi elle est à la fois libre et génératrice de F .

23.2 Théorème admis : tout sous-espace vectoriel F de E admet une base, et toutes les bases de F sont de même cardinal. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.

23.3 Théorème admis : soit F un sous-espace vectoriel de E , alors toute famille libre (resp. génératrice) de F est constituée d'au plus (resp. au moins) $\dim(F)$ vecteurs, et cas d'égalité.

23.4 Inclusion de sous-espaces et dimensions.

Intégrales des fonctions continues sur un segment

23.5 Aire orientée $\mathcal{A}_f(a, b)$ sous la courbe d'une fonction f continue entre a et b . Relation de Chasles pour les aires orientées. Théorème : $\mathcal{A}_{f,a} : x \mapsto \mathcal{A}_f(a, x)$ est dérivable, de dérivée f .

23.6 Primitive d'une fonction sur un intervalle. Théorème admis : toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle. Théorème de structure des primitives d'une fonction sur un intervalle. Existence et unicité d'une primitive F d'une fonction continue f sur un intervalle I vérifiant $F(x_0) = y_0$, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

23.7 Primitives usuelles, règles de calcul des primitives héritées des règles de dérivation.

23.8 Soient f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b deux points de I , alors $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie sur I . Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Vocabulaire : intégrande et borne.

23.9 Le théorème fondamental de l'analyse.

23.10 Relation de Chasles.

Python

23.11 Statistiques discrètes univariées en Python : dépouillement d'une série statistique brute, calcul des effectifs cumulés et des fréquences cumulées à partir d'une série statistique brute, commandes `np.unique`, `np.cumsum`. Diagrammes en bâtons. Histogramme normalisé avec regroupement en classes. Diagramme des fréquences cumulées, avec et sans regroupement en classes.

Quelques questions de cours

1. La colle commencera obligatoirement par une question de cours Python des PC11 à PC16 ou de ce PC.
2. Définir la notion de dimension d'un sous-espace vectoriel, ainsi que la proposition (58) justifiant cette définition. Donner les dimensions des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ en justifiant.
3. Énoncer la proposition (65) admise relative au cardinal des famille libre ou génératrice d'un sous espace vectoriel F de E . Montrer que $((1, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Énoncer et démontrer la proposition liant la notion de dimension à l'inclusion de sous-espaces vectoriels.
5. Définir la notion de primitive d'une fonction sur un intervalle. Donner les 4 règles suivantes relatives au calcul de primitives (au choix de l'interrogation, parmi les règles de pages 5 ou 6 du cours).
6. Énoncer et démontrer le théorème de structure de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle.
7. Énoncer et démontrer la proposition (11) assurant l'existence et l'unicité d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle vérifiant une certaine condition. Déterminer l'unique primitive F de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $F(3) = 1$.
Élèves : Une démonstration par analyse-synthèse a été proposée en classe mais une preuve d'existence/unicité bien réalisée sera acceptée.

8. Énoncer la proposition et définition définissant, sous hypothèses, la notation $\int_a^b f(t)dt$. Calculer $\int_{-2}^2 2x\sqrt{1+x^2}dx$.
9. Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.
10. Ecrire le code d'une fonction Python d'entête **def Regroupe(L,Y):** prenant en entrée une série statistique brute L et les extrémités d'un regroupement en classes présentées sous forme d'une liste Y, et renvoyant en sortie le couple **N,F** formé par la liste N des effectifs de ces classes, et la liste F de leurs fréquences.