

Programme de colle n° 24 : Intégrales de fonctions continues sur un segment. Probabilités (début).

Semaine du lundi 6 avril.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Le lundi 6 avril est férié

Intégrales

24.1 Début du chapitre : voir programme précédent.

24.2 Orientation de l'intégrale. Intégrales de fonctions paires, impaires. Linéarité de l'intégrale. Propriétés de positivité et de positivité stricte de l'intégrale. Intégration des inégalités. Inégalité triangulaire pour les intégrales. Exemples de suites définies à l'aide d'une intégrale.

24.3 Intégration par partie. Le "coup du 1".

24.4 Changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, rédaction.

24.5 Exemples d'intégrales "fonctions de leur borne", méthode pour appréhender ces objets.

24.6 Une comparaison série-intégrale : démonstration du cas convergent du critère relatif aux séries de Riemann.

Les changements de variables non affines à effectuer seront donnés par le sujet.

Espaces probabilisés (début).

24.7 Problématiques liées aux univers infinis (introduction) : familles infinies d'événements, dénombrabilité et ensemble des événements.

24.8 Notion d'ensemble dénombrable, au plus dénombrables. Exemples classiques d'ensembles dénombrables et non dénombrables. Unions et intersections dénombrables, rappel des lois de De Morgan et des distributivités. Illustration sur l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment une pièce à Pile ou Face.

Pas d'exercice théorique sur la notion de dénombrabilité.

Python

24.9 Statistiques descriptives univariées : recherche des indicateurs de position et de dispersion en Python (sans utiliser les commandes au programme), commandes `boxplot`, `min`, `max`, `mean`, `median`, `var`, `std` de `numpy`.

Quelques questions de cours

1. La colle commencera obligatoirement par une question de cours Python des PC11 à PC16 ou de ce PC.
2. (Retour de DS) Montrer que, dans tout graphe non orienté, deux sommets reliés par une chaîne sont reliés par une chaîne simple (i.e., n'empruntant pas deux fois la même arête). Existence d'une chaîne minimale admise. On sera sensible à la qualité de la rédaction.
3. Énoncer et démontrer la relation de Chasles et la propriété (22) d'orientation de l'intégrale.
4. Énoncer et démontrer la proposition relative aux intégrales de fonctions paires ou impaires.
5. Énoncer et démontrer les propriétés de positivité et de positivité stricte de l'intégrale.
6. Énoncer et démontrer la proposition concernant l'intégration des inégalités. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_n$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.
7. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les intégrales.
8. Énoncer et démontrer la proposition relative à l'intégration par partie. En déduire une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (exemple 33).
9. Énoncer et démontrer la proposition permettant d'effectuer des changements de variables de classe $\mathcal{C}^1$.
10. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de $\phi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^4}dt$ puis déterminer une expression de ϕ' .
11. Soit $\alpha > 1$. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}$. Qu'en déduire ?
12. Définir les notions d'ensembles dénombrables et au plus dénombrables. Montrer que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables. Expliquer comment montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Donner, sans justification, deux autres ensembles dénombrables.

et deux ensembles qui ne sont pas au plus dénombrables.

13. Rappeler les définitions des notations $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ ou $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties d'un ensemble Ω . Rappeler les lois de De Morgan et les distributivités pour ces réunions et intersections généralisées. Démonstrations exigibles, au choix de l'interrogation.
14. Définir les notions de modes, de moyenne empirique, de variance empirique d'une série statistique (quantitative discrète). Énoncer la formule de Koenig-Huygens. Écrire le code d'une fonction Python prenant en entrée une série statistique brute, et renvoyant en sortie la liste de ses modes (seule commande de statistiques autorisée pour ce code: `np.unique`).
15. Définir la notion de fonction de répartition d'une série statistique (quantitative discrète). Tracer l'allure type d'une telle fonction de répartition, et expliquer les caractères suivants observables sur ce graphique : les discontinuités, le caractère "constant par morceaux", les valeurs prises, la valeur des "sauts" aux points de discontinuités, la continuité à droite de ces fonctions. Aucune preuve formelle n'est attendue spontanément, mais l'interrogation pourra, en guise de premier exercice, guider la preuve d'un de ces points.