

TD de mathématiques n°18 : Intégrale des fonctions continues sur un segment

Pour commencer

Primitives et intégrales

Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions données par les formules suivantes, en donnant les intervalles de validité maximaux.

- | | | |
|----------------------------------|--|--|
| (a) $f(x) = (x-1)^2$ | (i) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ | (r) $f(x) = e^{-x}$ |
| (b) $f(x) = 2x(x^2-1)^2$ | (j) $f(x) = x\sqrt{x}$ | (s) $f(x) = e^{-3x}$ |
| (c) $f(x) = x(1-x^2)$ | (k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | (t) $f(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ |
| (d) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ | (l) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ | (u) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ |
| (e) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ | (m) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$ | (v) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ |
| (f) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ | (n) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ | (w) $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{x^2}$ |
| (g) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ | (o) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ | (x) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ |
| (h) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ | (p) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ | (y) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ |
| | (q) $f(x) = \frac{ x }{x}$ | (z) $f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{(1+e^{-\lambda x})^2}, \lambda \in \mathbb{R}^*$ |

Exercice 2

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$.

Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.

- (b) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x$.

Déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de primitives :

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $I_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x - 1 dx$ | (f) $I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ | (k) $I_{11} = \int_{-3}^5 x + \sqrt{x^2} dx$ |
| (b) $I_2 = \int_{-3}^{-1} \frac{(\ln(x^2))^3}{x} dx$ | (g) $I_7 = \int_0^{\ln 3} e^{-x} dx$ | (l) $I_{12} = \int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$ |
| (c) $I_3 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ | (h) $I_8 = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ | (m) $I_{13} = \int_1^3 \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ |
| (d) $I_4 = \int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ | (i) $I_9 = \int_2^e \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ | (n) $I_{14} = \int_{-2}^2 x^2 - 1 dx$ |
| (e) $I_5 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | (j) $I_{10} = \int_1^2 5^x dx$ | (o) $I_{15} = \int_0^1 \frac{x}{2-x^2} dx$ |

Exercice 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^x$ et $g(x) = x^2e^x$.

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$, puis en déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$, puis en déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

- (a) Soit $f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \\ x-1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est continue et calculer $\int_0^2 f(x) dx$.
- (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $m \leq n$. Calculer $\int_m^n [x]$.

Intégration par parties

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties :

- (a) $I_1 = \int_{-1}^1 x e^{-x} dx$ (e) $I_5 = \int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ (i) $I_9 = \int_0^1 x^2 e^x dx$
 (b) $I_2 = \int_{-1}^1 x^3 e^{-x^2} dx$ (f) $I_6 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ (j) $I_{10} = \int_0^3 (x^2 + x + 1) e^{-2x} dx$
 (c) $I_3 = \int_1^e (\ln x)^3 dx$ (g) $I_7 = \int_1^e x^2 (\ln x)^3 dx$ (k) $I_{11} = \int_1^e (\ln x)^2 dx$
 (d) $I_4 = \int_1^e x^2 \ln x dx$ (h) $I_8 = \int_1^e \ln x dx$ (l) $I_{12} = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e x^n \ln x dx$.

- (a) Calculer I_0 et I_1 .
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} dx$.
 (c) En déduire explicitement I_n en fonction de n .

Exercice 8 Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

Indication : on pourra s'intéresser à la division euclidienne de X^2 par $X+1$.

Changement de variable

Exercice 9 Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

- (a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1} dx, y = 2x+1$ (g) $I_7 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx, y = \frac{x}{x+1}$
 (b) $I_2 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, y = \sqrt{x}$ (h) $I_8 = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}} dx, y = 1+e^x$
 (c) $I_3 = \int_1^2 \frac{2x}{3x^2+1} dx, y = x^2$ (i) $I_9 = \int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)} dx, y = x^3$
 (d) $I_4 = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx, y = \ln x$ (j) $I_{10} = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx, y = e^{\sqrt{x}}$
 (e) $I_5 = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx, y = 1+2x$ (k) $I_{11} = \int_1^2 \frac{x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx, y = x^2$
 (f) $I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx, y = \sqrt{x}$ (l) $I_{12} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx, y = \sqrt{1+e^x}$

Exercice 10 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ en posant le changement de variable $s = \frac{1}{t}$.

Théorème fondamental de l'analyse, intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 11

- (a) Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1 + \ln x$ qui s'annule en 1.
 (b) Déterminer l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en 0.

Exercice 12 Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_1^x |\ln t| dt$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Exercice 13 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (préciser le domaine) :

- (a) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ (d) $G(x) = \int_{-x}^x \sqrt{1+t^2} dt$
 (b) $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$ (e) $I(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2} dt$
 (c) $J(x) = \int_0^x \frac{t}{\ln(t+2)} dt$ (f) $K(x) = \int_0^{e^x} \frac{t}{\ln(t+2)} dt$

Exercice 14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

- (a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
 (b) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x .
 (c) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (On pourra introduire une primitive G de $g : t \mapsto e^{-t^2}$ et exprimer F en fonction de G).
 (d) Dresser le tableau de variations de F en précisant la valeur de $F(0)$.

(e) Montrer que pour tout $x > 0$, $xe^{-4x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

(f) Étudier la convexité de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

Intégration des inégalités

Exercice 15 Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $a < b$.

(a) On suppose qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ et un segment $J \subset [a, b]$ de longueur non nulle, tels que : $\forall x \in J, f(x) \geq m$.

(b) En déduire une autre démonstration du résultat du cours suivant : si $\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Exercice 16

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+, 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_{n-1} + I_n$.

(c) En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 18 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2} dx$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$. En déduire I_0 .

(b) Calculer I_1 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

(d) En minorant $1 - x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 19 Pour tout $t \geq 2$, on pose $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^2}$.

(a) Dresser le tableau de variations de f sur $[2, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $k \geq 3, \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$.

(c) En déduire que pour tout $n \geq 3, \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n f(t)dt$.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Exercice 20 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$. On suppose $\int_a^b f(x)dx = b-a$, que dire de f ?

Exercice 21 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue (où $a < b$). On appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** le réel $M_{a,b} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Montrer que cette valeur moyenne est atteinte sur $[a, b]$: $\exists c \in [a, b], f(c) = M_{a,b}$.

On pourra chercher deux démonstrations.

Exercice 22 *Bien plus difficile.* Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer que $\int_0^1 (f(t))^n dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. *Indication : "Soit $\epsilon \in]0, 1[$ ".*

Pour continuer

Primitives et intégrales

Exercice 23 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2} dx$.

Exercice 24 Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R} (c \neq 0)$. Montrer que $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{1}{c} \left(a - \frac{ad-bc}{cx+d} \right)$ pour tout $x \neq -\frac{d}{c}$.

En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ sur tout intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Intégration par parties

Exercice 25 Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{X(1+X^2)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{1+X^2}$. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Changement de variable

Exercice 26 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) On suppose que f est paire. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$.

(b) On suppose que f est impaire. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$.

Exercice 27 Montrer que pour tout $x > 0$, pour tout $y > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ et le changement de variable $s = \frac{t}{x}$.

Théorème fondamental de l'analyse, intégrales fonctions de leurs bornes

Exercice 28 Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^x$.

Exercice 29 Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ et $G(x) = F(x) - \ln x$.

(a) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations

(b) Étudier les variations de G sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.

(c) Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 .

Intégration des inégalités

Exercice 31 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$, $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ et $K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^4} dx$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$.

Exercice 32 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

(a) Calculer I_0 et I_1 .

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 33 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n puis calculer I_0 et I_1 .

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\ln 2$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\ln 2 - I_n$ sous forme d'une intégrale et en déduire que $\ln 2 - I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.