Programme de colle n^o 25 : Probabilités, convexité.

*Semaine du lundi **13 avril**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Espaces probabilisés

25.1 Notion ("HP") de tribu. Proposition : l'ensemble vide appartient à toute tribu, une tribu est stable par intersection dénombrable, une tribu est stable par réunion et intersection finie.

Le terme de "tribu" n'est pas au programme, mais les propriétés associées à la définition le sont...

25.2 Notion d'espace probabilisable. Famille d'événements deux à deux incompatibles (rappel) dans un espace probabilisable. Probabilité sur un espace probabilisable, espace probabilisé. Propriétés (l'ensemble vide est un événement, la σ-additivité "est aussi vraie pour les réunions finies", et les propriétés vues dans le chapitre de probabilités finies sont toujours vraies). Majoration de $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$ l'aide de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ lorsque la série concernée converge.

25.3 Événements presque sûrs, négligeables. Indépendance mutuelle.

25.4 Exemple central. Expérience aléatoire : succession de lancers d'une pièce équilibrée à pile ou face. Questions : modéliser le problème, probabilité d'avoir pile pour la première fois au n-ième lancer (n fixé), probabilité d'avoir pile pour la première fois lors d'une lancer de numéro pair, probabilité de n'avoir que des piles lors des n premiers lancers, probabilité de ne faire que des piles.

"Limite monotone" et probabilité conditionnelle

25.5 Méthodes classiques pour démontrer qu'une réunion est quasi-certaine, qu'une intersection est quasi-impossible.

25.6 Propriété de la limite monotone (démonstrations non exigibles) : aperçu des résultats.

25.7 Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formules de Bayes. Événements indépendants, lien avec les probabilités conditionnelles.

25.8 Système complet d'événements, formule des probabilités totales. Notion (HP, en remarque) de système quasi-complet d'événement. Méthodes pour contourner cet oubli du programme.

Convexité

25.9 Position relative de deux courbes (rappel). Notion de fonction convexe, concave sur un intervalle. Interprétation de la définition : inégalité "des cordes". Une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

25.10 Cas des fonctions dérivables : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors, f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I ssi la courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes sur I (inégalité des tangentes).

Python

25.11 L'algorithme de Dijsktra.

Quelques questions de cours

1. La colle commencera obligatoirement par une question de cours Python des PC17 à ce PC.
2. Définir la notion de tribu, et énoncer les propriétés des tribus (proposition 13). Montrer que l'ensemble vide est élément de toute tribu, et qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.
3. Définir la notion d'espace probabilisable et d'espace probabilisé. Expliquer comment on modélise, en pratique, une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée à Pile ou Face.
4. Énoncer les propriétés générales (prop 19) des espaces probabilisés. En démontrer deux, au choix du colleur.
5. Énoncer et démontrer la proposition et définition définissant la notion de probabilité conditionnelle.
6. Énoncer et démontrer la formule des probabilités composées.
7. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales (avec et sans conditionnement).
8. On lance indéfiniment un dé à 6 faces équilibré. Déterminer la probabilité de l'événement : la première fois qu'un 1 tombe, il est suivi d'un autre 1.

9. Définir la notion de fonction convexe, concave sur un intervalle. Montrer, sans utiliser la dérivée, que $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que si une fonction f est convexe sur I, alors $-f$ est concave sur I. Montrer :

$$\forall x \in [1, e], \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}.$$

11. Énoncer les caractérisations de la convexité et de la concavité pour les fonctions dérivables. Démontrer l'implication vue en cours (si f' est croissante, alors l'inégalité des tangentes est vérifiée).
12. Appliquer l'algorithme de Dijkstra sur l'exemple suivant (au choix de l'interrogation), en gardant trace au tableau des explorations effectuées.