TD de mathématiques n°19 : Espaces probabilisés

Pour commencer

Dénombrabilité, opérations dénombrables, événements

Exercice 1 Montrer que l'application $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \end{array} \right.$ est bijective. Qu'est-ce que cela prouve ?

Exercice 2 Les ensembles suivants sont-ils dénombrables, sont-ils au plus dénombrables ?

(a) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.

(b) L'ensemble des entiers relatifs pairs.

(c) $[0, 1]$, puis $]2, 3[$.

(d) $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 10\}$.

Exercice 3 On considère une urne contenant des boules blanches et des boules noires.

On effectue une infinité de tirages successifs avec remise dans cette urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_n : "obtenir une boule blanche lors du tirage numéro n ".

Exprimer chacun des événements ci-dessous en utilisant les événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) B_n : "Obtenir une boule noire pour la première fois lors du tirage numéro n "

(b) C_n : "Obtenir un changement de couleur pour la première fois lors du tirage numéro n "

(c) D_n : "Ne jamais obtenir de boule noire au cours des n premiers tirages"

(d) E_n : "Ne jamais obtenir de changement de couleur au cours des n premiers tirages"

(e) F_n : "Ne jamais obtenir une boule blanche précédée d'une boule noire au cours des n premiers tirages"

(f) G_n : "Obtenir une unique boule noire au cours des n premiers tirages"

(g) B : "Obtenir au moins une boule noire"

(h) C : "Obtenir au moins un changement de couleur"

(i) D : "Ne jamais obtenir de boule noire"

(j) E : "Ne jamais obtenir de changement de couleur"

(k) F : "Ne jamais obtenir de boule blanche précédée d'une boule noire"

(l) G : "Obtenir une unique boule noire"

Exercice 4 On considère un dé à six faces numérotées de 1 à 6 . On effectue une infinité de lancers successifs avec ce dé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_n : "obtenir un 6 lors du lancer numéro n " ainsi que l'événement B_n : "obtenir un chiffre pair lors du lancer numéro n ".

Exprimer chacun des événements ci-dessous en utilisant les événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou ceux de la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) C_n : "Obtenir un 6 pour la première fois lors du lancer numéro n "

(b) D_n : "Obtenir un changement de parité pour la première fois lors du lancer numéro n "

(c) E_n : "Ne jamais obtenir de chiffre impair au cours des n premiers lancers"

(d) F_n : "Ne jamais obtenir de changement de parité au cours des n premiers lancers"

(e) G_n : "Ne jamais obtenir consécutivement deux chiffres de même parité au cours des n premiers lancers"

(f) H_n : "Obtenir un unique chiffre 6 au cours des n premiers tirages"

(g) I_n : "N'obtenir que des 6 à partir du lancer numéro n "

(h) C : "Obtenir au moins un chiffre 6"

(i) D : "Obtenir au moins un changement de parité"

(j) E : "Ne jamais obtenir de chiffre impair"

(k) F : "Ne jamais obtenir de changement de parité"

(l) G : "Ne jamais obtenir consécutivement deux chiffres de même parité"

(m) H : "Obtenir un unique chiffre 6"

(n) I : "N'obtenir que des 6 à partir d'un certain rang"

Événements négligeables, événements presque-sûrs

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ un événement.

Montrer que si A est négligeable (resp. presque-sûr), alors A est indépendant de tout événement $B \in \mathcal{A}$.

Exercice 6 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements.

(a) On suppose que A et B sont négligeables. Montrer que $A \cup B$ est négligeable.

(b) On suppose que A et B sont presque-sûrs. Montrer que $A \cap B$ est presque-sûr.

Exercice 7 On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une infinité de fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 .

On considère les événements A : "ne jamais obtenir de chiffre pair" et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A_n$: "obtenir un chiffre impair lors du lancer numéro n".

(a) Exprimer l'événement A en utilisant les événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$.

(c) En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 8 Une urne contient une boule rouge et une boule blanche. On tire successivement, une à une et avec remise, des boules dans cette urne en ajoutant après chaque tirage une boule supplémentaire de la couleur de celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement : "on obtient une boule blanche lors du tirage numéro n " et on note également B l'événement : "toutes les boules tirées sont blanches".

(a) Exprimer l'événement B en utilisant les événements de la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k\right)$.

(c) En déduire la probabilité réalisation de l'événement : "au moins une boule rouge a été tirée".

Exercice 9 On considère une infinité d'urnes numérotées $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \ldots, \mathcal{U}_n, \ldots$ et on suppose que pour tout $n \geq 2$, l'urne $\mathcal{U}_n$ contient n boules dont 1 unique noire, les autres étant blanches. On tire successivement et indéfiniment une boule dans chacune de ces urnes, dans l'ordre de leurs numéros.

Pour tout $n \geq 2$, on note A_n l'événement : "obtenir une boule blanche dans l'urne $\mathcal{U}_n$ " et on note également l'événement A : "ne jamais obtenir de boule noire".

(a) Exprimer l'événement A en utilisant les événements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \backslash\{1\}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, calculer $P\left(\bigcap\limits_{k=2}^{n} A_k\right)$.

(c) En déduire la valeur de $P(A)$.

Additivité dénombrable

Exercice 10 Une page du cours de mathématiques contient une erreur de frappe : à chaque relecture, la probabilité de corriger l'erreur est égale à $p = \frac{1}{3}$. On effectue une infinité de relectures indépendantes de cette page. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement : "la faute est corrigée lors de la n-ième relecture".

(a) Déterminer $P(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire la probabilité de l'événement C : "la faute est corrigée".

Exercice 11 Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face. Le joueur A lance une pièce équilibrée : s'il obtient Pile, alors il gagne, sinon le joueur B lance une pièce équilibrée : s'il obtient Face, alors il gagne, sinon le joueur A rejoue. On répète indéfiniment ce protocole.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n) l'événement : "le joueur A (resp. B) gagne lors de son nème lancer".

(a) Calculer $P(A_1), P(B_1), P(A_2)$ et $P(B_2)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(A_n)$ et $P(B_n)$ explicitement en fonction de n.

(c) Déterminer la probabilité de réalisation de l'événement G_A (resp. G_B) : "le joueur A (resp. B) gagne".

(d) En déduire la probabilité de réalisation de l'événement : "le jeu ne termine jamais".

Exercice 12 On considère une urne contenant 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise une boule dans cette urne jusqu'à obtenir :

- soit une boule rouge et dans ce cas le jeu s'arrête et le joueur a gagné.
- soit une boule verte et dans ce cas le jeu s'arrête et le joueur a perdu.

(a) Déterminer la probabilité de l'événement "le joueur gagne".

(b) Déterminer la probabilité de l'événement "le joueur perd".

(c) Déterminer la probabilité de l'événement "le jeu ne termine jamais".

Exercice 13 On considère un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 ainsi qu'une urne qui contient initialement une boule rouge. On effectue une succession de lancers du dé avec le protocole suivant :

- Si l'on obtient 6 à un certain lancer, alors on tire une boule dans l'urne et l'expérience s'arrête.
- Sinon, on ajoute une boule blanche dans l'urne avant de relancer le dé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_n : "le dé a été lancé n fois" et on considère également l'événement R : "la boule tirée est rouge".

On admet que l'événement "le jeu ne termine jamais" est négligeable (exercice).

(a) Justifier que la famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(A_n)$ et $P_{A_n}(R)$.

(c) En déduire la valeur de $P(R)$. On admet que pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (voir TD Intégration).

Exercice 14 Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère une urne contenant b boules blanches et n boules noires et on pose $p = \frac{b}{b+n}$ et $q = \frac{n}{b+n}$.

On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans l'urne, jusqu'à ce que l'on ait obtenu au moins une fois une boule blanche et au moins une fois une boule noire.

Pour tout $k \geq 2$, on considère l'événement A_k : "on a effectué k tirages" ainsi que l'événement B : "on a tiré une unique boule blanche".

(a) Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \geq 2$.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$ et en déduire que le jeu termine presque sûrement.

(c) En utilisant le système complet d'événements $(A_k)_{k\geq 2}$, montrer que $P(B) = q(1+p)$.

Exercice 15 Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce truquée de sorte à ce que la probabilité d'obtenir Pile soit égale à p et on pose $q = 1 - p$. On effectue une infinité de lancers successifs et indépendants avec cette pièce. On admet que l'événement : "ne jamais obtenir Pile" est négligeable et on le néglige.

On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce en nombre fini égal au rang d'apparition du premier Pile obtenu à la suite de la succession infinie de lancers effectuée précédemment.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : "au cours de la succession infinie de lancers, on a obtenu Pile pour la première fois au k-ème lancer".

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note B_n l'événement : "au cours de la succession fini de lancers, on a obtenu exactement n fois Pile".

(*a*) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(A_k)$.

(*b*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire $P(B_n)$.

On admettra que pour tout $x \in]0,1[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} x^{j-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ (voir TD Séries).

Pour continuer

Dénombrabilité, opérations dénombrables, événements

Exercice 16 Montrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p(2q+1)-1 \end{array}$ est bijective. Qu'est-ce que cela prouve ?

Exercice 17 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Montrer que :

(*a*) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$.

(*b*) $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $P(\emptyset) = 0$.

(*c*) Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Événements négligeables, événements presque-sûrs

Exercice 18 On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers, les côtés Pile et Face soient apparus au moins une fois chacun.

(*a*) Calculer p_1, p_2 et p_3. Déterminer explicitement p_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

(*b*) En déduire la probabilité de l'événement : "les côtés Pile et Face sont apparus au moins une fois chacun".

Exercice 19 On considère une urne contenant une boule rouge, une boule verte et une boule bleue.

On effectue une infinité de tirages successifs avec remise dans cette urne.

(*a*) Déterminer la probabilité de réalisation de l'événement R : "la couleur rouge n'apparait pas"

(*b*) Déterminer la probabilité de réalisation de l'événement T : "chacune des trois couleurs apparaît au moins une fois dans le résultat".

Exercice 20 Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce truquée qui tombe sur Face avec probabilité p. On effectue une infinité de lancers indépendants avec cette pièce et pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, on note A_n l'événement : "au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile".

(*a*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, déterminer la valeur de $P(A_n)$.

(*b*) Déterminer la probabilité de l'événement A : "Face n'est jamais suivi de Pile".

Additivité dénombrable

Exercice 21 On considère une urne contenant 1 boules rouge, 1 boule bleue et 1 boule verte indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise une boule dans cette urne jusqu'à obtenir :

- soit une boule rouge et dans ce cas le jeu s'arrête et le joueur a gagné.
- soit une boule verte et dans ce cas le jeu s'arrête et le joueur a perdu.

De plus, on suppose qu'à chaque fois qu'une boule bleue est tirée, on la remet dans l'urne et on ajoute de plus une boule bleue supplémentaire.

(a) Déterminer la probabilité de l'événement "le joueur gagne".

(b) Déterminer la probabilité de l'événement "le joueur perd".

(c) Déterminer la probabilité de l'événement "le jeu ne termine jamais".

Exercice 22 On effectue une infinité de lancers indépendants avec une pièce équilibrée.

On suppose que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ approprié.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on modélise l'expérience aléatoire portant uniquement sur les n premiers lancers effectués par un univers $\Omega_n = \{P, F\}^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le sous-ensemble $U_n \subset \Omega_n$ formé des résultats pour lesquels on obtient pour la première fois un Pile précédé d'un Pile au lancer numéro n et on note $u_n = \text{Card}\,(U_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement $A_n \subset \Omega$: "on a obtenu pour la première fois un Pile précédé d'un Pile lors du lancer numéro n" et on note $a_n = P(A_n)$.

(a) Déterminer explicitement U_k et u_k pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Indication : on pourra dénombrer les éléments de U_{n+2} en distinguant ceux qui commencent par Face de ceux qui commencent par Pile.

(c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une formule donnant explicitement u_n en fonction de n.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une formule donnant explicitement a_n en fonction de n.

(e) En déduire la probabilité de l'événement A : "obtenir au moins une fois un Pile précédé d'un Pile".

Exercice 23 Deux archers A et B tirent à l'arc chacun à leur tour, indépendamment, sur une cible.

L'archer A commence. Le premier joueur qui touche la cible gagne le jeu.

On note $p_1 \in]0, 1[$ la probabilité de toucher la cible pour le joueur 1 (resp. $p_2 \in]0, 1[$ pour le joueur 2).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k (resp. B_k) l'événement : "le joueur A (resp. B) touche la cible au k-ème tir".

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n (resp. D_n) l'événement : "le joueur A (resp. B) gagne le jeu au n-ème tir".

Enfin, on note G_A (resp. G_B) l'événement "le joueur A (resp. B) gagne le jeu".

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement C_n en fonction de certains des événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

(b) Exprimer l'événement G_A en fonction de certains des événements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) En déduire la valeur de $P(G_A)$.

(d) Déterminer avec un raisonnement analogue la valeur de $P(G_B)$.

(e) En déduire que le jeu termine presque sûrement.

(f) Pour quelles valeurs de p_1 existe-t-il p_2 tel que le jeu soit équitable ? Interpréter.