Lycée Hoche
ECG1A

2023-2024
Mathématiques

Correction : DS n°1

DS du 7 octobre 2023

Exercice 1

1. (*a*) La négation de la proposition donnée est $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z > y \text{ et } e^z \leq x.}$

   (*b*) Montrons que P est vraie. *(Il fallait comprendre que "y était le logarithme de x").*
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $y = \ln(x)$. Alors, pour tout réel z :

   $$z > y \iff z > \ln(x) \implies e^z > x$$

   (par stricte croissance de l'exponentielle).

   On a bien trouvé un réel y tel que : $\forall z \in \mathbb{R}, z > y \implies e^z > x$. Ceci démontre P.

2. Par disjonction des cas (si n est impair, montrer que $3n+1$ est pair).

3. Étude de la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $t \mapsto \ln(1+t) - t$. Son tableau de variation montre qu'elle atteint un maximum en 0 qui vaut 0.

4. Cf cours.

5. Cf cours.

6. Cf cours.

7. Par croissance stricte de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leq 4 < 10 \implies 2 < \sqrt{10}$. Donc $\sqrt{10} - 2 \in \mathbb{R}_+$.
   Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

   $$\begin{aligned}
   \sqrt{10} - 2 < \sqrt{3} &\iff (\sqrt{10} - 2)^2 < \sqrt{3}^3 \\
   &\iff 10 - 4\sqrt{10} + 4 < 3 \\
   &\iff 11 < 4\sqrt{10} \\
   &\iff 11^2 < (4\sqrt{10})^2 \quad \text{(encore par croissance stricte de la fonction carré)} \\
   &\iff 121 < 160
   \end{aligned}$$

   La dernière inégalité est vraie, donc par équivalence : $\boxed{\sqrt{10} - 2 < \sqrt{3}.}$

8. Par contraposée : si $a_k < \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors en sommant ces inégalités, on trouve :

   $$a_1 + \ldots + a_n < 1.$$

9.
```
P=1
for k in range(1,2024):
        P=P*(1+k+k**2)
print(P)
```

10. Cf cours.

Exercice 2

1. L'équation $x^4 + 2 = 0$ est clairement définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $x^4 + 2 = 0 \iff x^4 = -2$. Or, $x^4 = (x^2)^2$ est positif car c'est un carré. Donc $x^4 \neq -2$. Autrement dit, $\boxed{\text{L'équation } x^4 + 2 = 0 \text{ d'inconnue réelle } x \text{ n'a pas de}}$

2. Notons (I) l'inéquation donnée par $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) < 0$. Déterminons d'abord le domaine de définition de (I).

Soit $x \in \mathbb{R}$.
L'expression $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ est bien définie ssi $1-x^2 \neq 0$, par quotient. Or,

$$1-x^2=0 \iff x^2=1 \iff x=1 \text{ ou } x=-1.$$

Donc $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ est bien défini si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
Dans ce cas, $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ est bien défini ssi $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0$.
Un rapide tableau de signe (le faire) montre :

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \iff x \in]-1,1[.$$

En conclusion, l'inéquation (I) est définie sur $D =]-1,1[$.

Résolvons (I). Soit $x \in D$.
Par croissance stricte de l'exponentielle :

$$\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) < 0 \iff \frac{1+x^2}{1-x^2} < e^0 = 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (I) &\iff \frac{1+x^2}{1-x^2} < 1 \\ &\iff \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 < 0 \\ &\iff \frac{1+x^2-(1-x^2)}{1-x^2} < 0 \\ &\iff \frac{2x^2}{1-x^2} < 0 \end{aligned}$$

Or, $2x^2 \geq 0$ (car tout carré est positif) et $1-x^2 > 0$ (car $x \in]-1,1[$). Ainsi, la dernière inégalité est fausse / x n'est pas solution de (I).

En conclusion, $\boxed{(I) \text{ n'admet aucune solution.}}$

3. L'équation $(E) : e^{2x} - e^x - 1 = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$, car l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit x un réel. Alors, $e^{2x} - e^x - 1 = 0 \iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$.
Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si e^x est racine du polynôme $X^2 - X - 1$.
Or, $X^2 - X - 1$ est un polynôme du second degré, de discriminant $5 > 0$ donc de racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si :

$$e^x = x_1 \text{ ou } e^x = x_2.$$

Or, $x_1 < 0$ (car $\sqrt{5} > 1$) et $x_2 > 0$. Donc $e^x \neq x_1$ (l'exponentielle est à valeurs positives), donc x est solution de (E) si et seulement si $e^x = x_2$, si et seulement si $x = \ln(x_2)$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ est } \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}).}$$

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. L'expression $\dfrac{1}{\sqrt{t+1}-t+1}$ donnée de $f(t)$ est bien définie si et seulement si : $\sqrt{t+1}$ est bien défini et $\sqrt{t+1}-t+1 \neq 0$.
Or, $\sqrt{t+1}$ est bien défini si et seulement si $t+1 \geq 0$, si et seulement si $t \geq -1$.
Supposons dans la suite $t \geq -1$.

$$\sqrt{t+1} - t + 1 = 0 \iff \sqrt{t+1} = t-1.$$

1e cas : Si $t < 1$, alors, $t - 1 < 0$ et $\sqrt{t+1} \geq 0$ donc $\sqrt{t+1} \neq t - 1$. Ainsi, dans ce cas, f est définie en t.

2e cas : Sinon, $t \geq 1$ donc $t - 1$ et $\sqrt{t+1}$ sont positifs. Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{t+1} = t-1 \iff t+1 = (t-1)^2 \iff t+1 = t^2 - 2t + 1 \iff t^2 - 3t = 0 \iff t(t-3) = 0 \iff t = 3$$

(car $t \geq 1$ dont $t \neq 0$). Ainsi, dans ce cas, f est définie en t ssi $t \neq 3$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est définie sur } [-1, 3[\cup]3, +\infty[.}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} |x^2 - 2x + 2| < 3 &\iff -3 < x^2 - 2x + 2 < 3 \\ &\iff x^2 - 2x + 5 > 0 \text{ et } x^2 - 2x - 1 < 0 \end{aligned}$$

Considérons les polynômes donnée par $P(X) = X^2 - 2X + 5$ et $Q(X) = X^2 - 2X - 1$. P est un polynôme du second degré, de discriminant $-16 < 0$ donc ne s'annule pas et est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son coefficient dominant étant positif, P est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $P(x) > 0$.

Q est un polynôme du second degré, de discriminant $8 > 0$ donc Q admet deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Le coefficient dominant de Q étant positif, Q est négatif entre ses racines, donc :

$$Q(x) < 0 \iff x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[.$$

Finalement, pour tout réel x:

$$|x^2 - 2x + 2| < 3 \iff P(x) > 0 \text{ et } Q(x) < 0 \iff x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[.$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } |x^2 - 2x + 2| < 3 \text{ est }]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[.}$

6. Soit $t \in \mathbb{R}$.
L'expression $\ln(t)$ est bien définie si et seulement si $t > 0$.
Dans ce cas, la puissance généralisée $(1+t)^{\ln(t)}$ est bien définie si et seulement si $1 + t > 0$, ce qui est vrai (car $t > 0$).

Ainsi, $\boxed{f \text{ admet pour domaine de définition sur } \mathbb{R}_+^*}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) = \exp\left(\ln(1+t)\ln(t)\right).$$

Alors, $g : t \mapsto \ln(1+t)\ln(t)$ étant dérivable sur son domaine de définition, comme produit de fonctions qui le sont, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur son domaine de définition}}$ comme composée des fonctions g et $\exp : t \mapsto e^t$, dérivables sur leurs domaines de définition.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(t) = \frac{\ln(t)}{1+t} + \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{t\ln(t) + (1+t)\ln(1+t)}{t(1+t)} = \frac{\ln(t^t(1+t)^{1+t})}{t(1+t)}$$

et on a donc:

$$f'(t) = (\exp \circ g)'(t) = g'(t) \times \exp(g(t)) = \frac{\ln(t^t(1+t)^{1+t})}{t(1+t)}(1+t)^{\ln(t)}$$

Finalement, $\boxed{f'(t) = \frac{\ln(t^t(1+t)^{1+t})}{t}(1+t)^{\ln(t)-1}}$

Exercice 3

1. L'équation (E_0) d'inconnue réelle x est donnée par $1 = 0$. Cette égalité étant fausse pour tout réel x, $\boxed{(E_0) \text{ n'admet pas de solutions.}}$

2. (a) L'équation (E_y) d'inconnue réelle x est donnée par $y^2x^2 + 2ye^{\frac{y}{2}}x + y + 1 = 0$. L'expression $y^2x^2 + 2ye^{\frac{y}{2}}x + y + 1$ est bien polynomiale en le réel x, de degré 2 car le coefficient de x^2 est $y^2 \neq 0$ (car $y \neq 0$).

   $\boxed{\text{L'équation } (E_y) \text{ est bien une équation polynomiale de degré 2.}}$

   $\boxed{\text{Le discriminant de ce polynôme est } \Delta = (2ye^{\frac{y}{2}})^2 - 4(y+1)(y^2) = 4y^2(e^y - y - 1).}$

   (b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^t - t - 1$. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables (les polynômes et l'exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$). Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = e^t - 1.$$

   Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) > 0 \iff e^t - 1 > 0 \iff e^t > 1 = e^0 \iff t > 0$$

   (par croissance stricte de l'exponentielle), et de même

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 0 \iff t = 0.$$

   Ainsi, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ *(vous pouvez ici faire le tableau de variation, ça vous permet de gagner en visibilité).* f admet donc un minimum en 0, qui vaut $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$.

   De plus, par monotonie stricte sur les intervalles ci-dessus :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(t) > 0.$$

   Finalement, pour tout réel t :

$$f(t) \geq 0 \text{ et } (f(t) = 0 \iff t = 0).$$

   Cela démontre bien : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, e^t > 1 + t \text{ et } (e^t = 1 + t \iff t = 0).}$

   (c) Le discriminant Δ de (E_y) est $\Delta = 4y^2(e^y - y - 1)$. Mais $4y^2 > 0$ car $y \neq 0$ donc le signe stricte de Δ est celui de $e^y - y - 1$. Or, d'après la question précédente appliquée en y, $e^y - y - 1 \geq 0$ et $e^y - y - 1 = 0 \iff y = 0$.
   Comme ici $y \neq 0$, on a $\Delta > 0$.

   Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, (E_y) admet donc deux solutions notées x_1 et x_2, données par :

$$\boxed{x_1 = \frac{-2ye^{\frac{y}{2}} + \sqrt{4y^2(e^y - y - 1)}}{2y^2} = \frac{\sqrt{y^2(e^y - y - 1)} - ye^{\frac{y}{2}}}{y^2} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{y^2(e^y - y - 1)} - ye^{\frac{y}{2}}}{y^2}.}$$

Exercice : Montrer que ces deux solutions sont $\frac{\sqrt{(e^y - y - 1)} - e^{\frac{y}{2}}}{y}$ et $\frac{-\sqrt{(e^y - y - 1)} - e^{\frac{y}{2}}}{y}$ (il y a un petit argument à trouver, attention à vos calculs).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $\left|\dfrac{1+mx}{1-x}\right|$ est bien définie si et seulement si $x \neq 1$, par quotient ($x-1=0 \iff x=1$).

Dans ce cas, $\left|\dfrac{1+mx}{1-x}\right| \geq 0$ par positivité de la valeur absolue, et :

$$\left|\frac{1+mx}{1-x}\right| = 0 \iff \frac{1+mx}{1-x} = 0 \iff 1+mx=0 \iff mx=-1.$$

Ainsi, l'expression $\left|\dfrac{1+mx}{1-x}\right|$ est bien définie et strictement positive si et seulement si :

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \dfrac{-1}{m}\}$, si $m \neq 0$.
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, si $m = 0$.

Finalement, le logarithme étant défini sur $\mathbb{R}_+^*$:

Si $m \neq 0$, L'équation (E_m) : $\ln(\left|\dfrac{1+mx}{1-x}\right|) > 0$ est définie sur $D_m = \mathbb{R} \setminus \{1, -\dfrac{1}{m}\}$, et l'équation (E_0) est définie sur $D_0 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Soit $x \in D_m$.

Par croissance stricte de l'exponentielle :

$$\ln(\left|\frac{1+mx}{1-x}\right|) > 0 \iff \left|\frac{1+mx}{1-x}\right| > 1$$

donc x est solution de (E_m) ssi :

$$\frac{1+mx}{1-x} > 1 \text{ ou } \frac{1+mx}{1-x} < -1.$$

Résolution de $\dfrac{1+mx}{1-x} > 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1+mx}{1-x} > 1 &\iff \frac{1+mx}{1-x} - 1 > 0\\ &\iff \frac{1+mx-1+x}{1-x} > 0\\ &\iff \frac{(m+1)x}{1-x} > 0\end{aligned}$$

Après un tableau de signe rapide de $\dfrac{x}{1-x}$ *(à faire)*, on a :

1e cas : Si $m=-1$, $\dfrac{(m+1)x}{1-x} > 0 \iff 0 > 0$, donc x n'est pas solution de $\dfrac{1+mx}{1-x} > 1$.

2e cas : Si $m > -1$, $m+1 > 0$ donc $\dfrac{(m+1)x}{1-x} > 0 \iff \dfrac{x}{1-x} > 0 \iff x \in]0,1[$.

3e cas : Si $m < -1$, $m+1 < 0$ donc $\dfrac{(m+1)x}{1-x} > 0 \iff \dfrac{x}{1-x} < 0 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Résolution de $\dfrac{1+mx}{1-x} < -1$.

$$\begin{aligned}\frac{1+mx}{1-x} < -1 &\iff \frac{1+mx}{1-x} + 1 < 0\\ &\iff \frac{1+mx+1-x}{1-x} < 0\\ &\iff \frac{(m-1)x+2}{1-x} < 0\end{aligned}$$

1e cas : Si $m=1$, $\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}<0 \iff \dfrac{2}{1-x}<0 \iff 1-x<0 \iff x\in]1,+\infty[$.

2e cas : Si $m>1$, alors $m-1>0$, donc on dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{m-1}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2$		-	0	+		+	
$1-x$		+		+	0	-	
$\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}$		-	0	+	||	-	

donc $\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}<0 \iff x\in]-\infty,\dfrac{-2}{m-1}[\cup]1,+\infty[$.

3e cas : Si $m<1$, $(m-1)x+2$ changeant de signe en $\dfrac{-2}{m-1}$, on doit faire des sous-cas pour faire notre tableau de signe. On a $\dfrac{-2}{m-1}<1 \iff m<-1$ donc:

1e sous cas : si $m<-1$, on se réfère au tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{m-1}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2$		+	0	-		-	
$1-x$		+		+	0	-	
$\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}$		+	0	-	||	+	

2e sous cas : si $m>-1$, on se réfère au tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$-\dfrac{2}{m-1}$		$+\infty$
$(m-1)x+2$		+		+	0	-	
$1-x$		+	0	-		-	
$\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}$		+	||	-	0	+	

3e sous cas: Si $m=-1$, $\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}=\dfrac{-2x+2}{1-x}=2\geq 0$ donc $\dfrac{(m-1)x+2}{1-x}\geq 0$, x n'est pas solution de $\dfrac{1+mx}{1-x}<-1$. <u>Finalement :</u>

- Si $m<-1$, l'ensemble des solutions de (E_m) est :

$$\mathbb{R}\setminus\{1,-\frac{1}{m}\}\cap\left(]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup]-\frac{2}{m-1},1[\right)=]-\infty,0[\cup]-\frac{2}{m-1},-\frac{1}{m}[\cup]-\frac{1}{m},1[\cup]1,+\infty[$$

- Si $m=-1$, (E_m) n'admet aucune solution.
- Si $-1<m<1$ et $m\neq 0$, l'ensemble des solutions de (E_m) est :

$$\mathbb{R}\setminus\{1,-\frac{1}{m}\}\cap\left(]0,1[\cup]1,-\frac{2}{m-1}[\right)=]0,1[\cup]1,-\frac{2}{m-1}[.$$

- Si $m=0$, l'ensemble de solutions de (E_m) est :

$$\mathbb{R}\setminus\{1\}\cap\left(]0,1[\cup]1,-\frac{2}{m-1}[\right)=]0,1[\cup]1,-\frac{2}{m-1}[.$$

- Si $m=1$, l'ensemble des solutions de (E_m) est :

$$\mathbb{R}\setminus\{1,-\frac{1}{1}\}\cap(]0,1[\cup]1,+\infty[)=]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

- Si $m>1$, l'ensemble des solutions de (E_m) est :

$$\mathbb{R}\setminus\{1,-\frac{1}{m}\}\cap\left(]0,1[\cup]-\infty,\frac{-2}{m-1}[\cup]1,+\infty[\right)=]-\infty,\frac{-2}{m-1}[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[.$$

Exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, les expressions $e^{2x}-1$ et $e^{2x}+1$ sont bien définies. De plus,
$$e^{2x}-1=0 \iff e^{2x}=1 \iff 2x=\ln(1) \iff x=0$$
(par croissance stricte du logarithme).

   Ainsi, $x \mapsto e^{2x}+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{2x}-1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et non nulle exactement sur $\mathbb{R}^*$.
$\boxed{f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \text{ admet donc } D_f = \mathbb{R}^* \text{ comme domaine de définition}}$, comme quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. Tout d'abord, D_f est clairement symétrique par rapport à 0. Calculons alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} \overset{(1)}{=} \frac{e^{2x}(e^{-2x}+1)}{e^{2x}(e^{-2x}-1)} = \frac{e^{2x}+1}{-(e^{2x}-1)} = -f(x).$$
$((1) :$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} \neq 0)$

   Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire. Son graphe } \mathcal{C} \text{ est donc symétrique par rapport à l'origine.}}$

3. f est dérivable sur son domaine de définition comme $\boxed{\text{quotient de fonctions dérivables sur leurs domaines de définitions.}}$ Alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}-1)-(e^{2x}+1)2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$
d'où $\boxed{\forall x \in D_f, f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}.}$

4. Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -4\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ et $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ est strictement positif comme quotient de réels strictement positifs (par positivité stricte de l'exponentielle, et car tout carré d'un réel est positif). f' est donc strictement négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc par théorème f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
f	$\|\| +\infty$	$\searrow$	1

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, (par croissance stricte de l'exponentielle) $e^{2x} > e^0 = 1$ donc $e^{2x}-1>0$. De plus, $e^{2x}+1>0$. Par quotient, $f(x)>0$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+^*.}$

6. Calculons :
$$f(\ln(3)) = \frac{e^{2\ln(3)}+1}{e^{2\ln(3)}-1} = \frac{e^{\ln(9)}+1}{e^{\ln(9)}-1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$
et
$$f'(\ln(3)) = \frac{-4e^{2\ln(3)}}{(e^{2\ln(3)}-1)^2} = \frac{-4\cdot 9}{8^2} = -\frac{9}{16}.$$

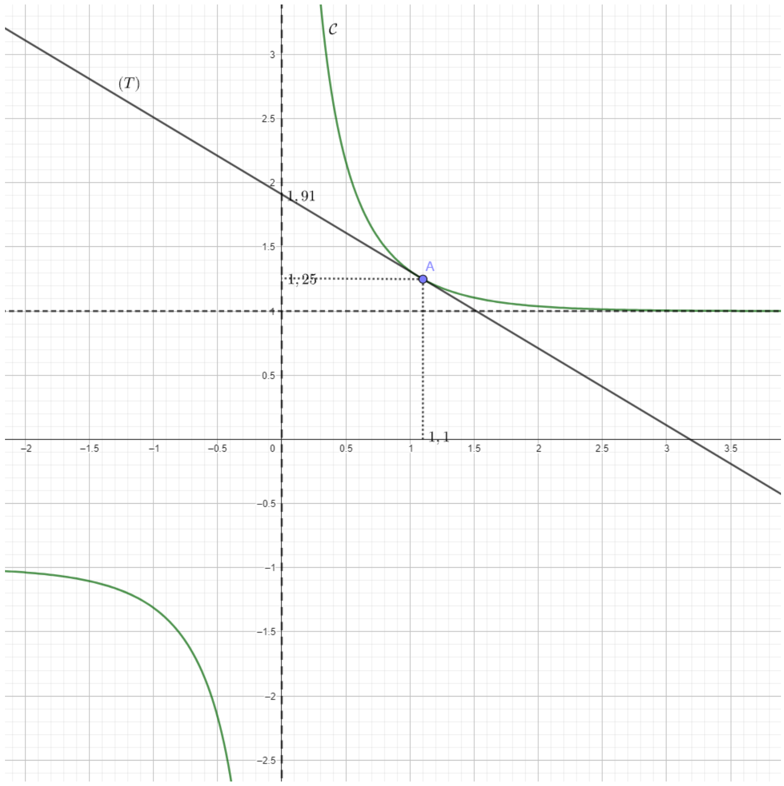
7. L'équation de la tangente à la courbe de f en $\ln(3)$ est :
$$y = f'(\ln(3))(x-\ln(3)) + f(\ln(3)).$$
D'après la question précédente:
$\boxed{\text{L'équation de la tangente } (T) \text{ à } \mathcal{C} \text{ en } \ln(3) \text{ est : } y = -\dfrac{9}{16}(x-\ln(3)) + \dfrac{5}{4}.}$

8. D'après les approximations données, la pente de (T) passe par le point $(\ln(3); f(\ln(3))$ de $\mathcal{C}$ approximé par $(1,1; \frac{5}{4}) = (1,1; 1,25)$.

   Son ordonnée à l'origine est $-\dfrac{5}{4} + \dfrac{9}{16}\ln(3)$ approximé par :
$$1,25 + 0,6 \times 1,1 = 1,25 + 0,66 = 1,91.$$

D'après les limites données, $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Enfin le graphe de f sur $\mathbb{R}_-^*$ s'obtient à partir de l'étude faite sur $\mathbb{R}_+^*$ par symétrie centrale par rapport à l'origine. On obtient le graphe suivant.



Exercice 5

1. Tout d'abord, la fonction f est bien définie, car $\sqrt{t}$ est bien défini et non nul pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

   De plus, $t \mapsto e^{\frac{t}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable (et non nulle) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est dérivable, comme quotient, sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\sqrt{t} - e^{\frac{t}{2}}\frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2} = \frac{e^{\frac{t}{2}}(t-1)}{2t\sqrt{t}}.$$

   Puisque $t > 0$, $\dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{2t\sqrt{t}}$ est strictement positif comme quotient de réels strictement positifs, donc $f'(t)$ est du signe de $t - 1$, d'où le tableau de variation de f complété par les limites données :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
f	$\vert\vert +\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	

   (et car $f(1) = e^{1/2} = \sqrt{e}$.)

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Notons (E_n) l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   D'après la question précédente, f est strictement décroissante et continue, car dérivable, sur $]0, 1[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$ et $f(1) = \sqrt{e}$.

   Par théorème, $f(]0, 1[) =]\sqrt{e}, +\infty[$ et f est injective sur $]0, 1[$.

   De plus, $n \geq 2 > \sqrt{3} > \sqrt{e}$ car $e < 3$ ($\lfloor e \rfloor = 2$) donc $n > \sqrt{e}$ donc :
   $n \in f(]0, 1[)$ et f est injective sur $]0, 1[$.

   Ainsi, n admet un unique antécédent par f sur l'intervalle $]0, 1[$. Autrement dit, il existe un unique réel de $]0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$.

De même, f est strictement croissant et continue sur $[1,+\infty[$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ donc par théorème :

$$f([1,+\infty[) = [f(1),+\infty[= [\sqrt{e},+\infty[.$$

et f est injective sur $[1,+\infty[$.
Ainsi, $n \in f([1,+\infty[)$: n admet un antécédent sur $[1,+\infty[$ et celui-ci est unique, par injectivité. On note v_n ce réel, on a bien $f(v_n) = n$ et $v_n \geq 1$. Enfin, $v_n > 1$ car $f(1) = \sqrt{e} < 2 \leq n$ montre $v_n \neq 1$.

En conclusion, pour tout $n \geq 2$, (E_n) admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, car elle admet une unique solution u_n sur $]0,1[$ et une unique solution v_n sur $[1,+\infty[$.
On a de plus bien montré $u_n < 1 < v_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
Alors, v_{n+1} et v_n sont éléments de $]1,+\infty[$, et f est strictement croissante sur cet intervalle. Ainsi :

$$v_{n+1} \geq v_n \iff f(v_{n+1}) \geq f(v_n) \iff n+1 \geq n.$$

La dernière inégalité étant clairement vraie, on a bien démontré $v_{n+1} \geq v_n$ pour tout entier $n \geq 2$.

La suite (v_n) est bien croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
Alors, u_{n+1} et u_n sont éléments de $]0,1[$, et f est strictement décroissante sur cet intervalle. Ainsi :

$$u_{n+1} \leq u_n \iff f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \iff n+1 \geq n.$$

La dernière inégalité étant clairement vraie, on a bien démontré $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq 2$.

La suite (u_n) est bien décroissante.

Exercice 6

1. f et g admettant $\mathbb{R}_+$ comme domaine de définition, $h = f - g$ admet également $\mathbb{R}_+$ comme domaine de définition.

2. $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x+2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonctions polynomiales. De plus, $x \mapsto x+2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+, (x+2)^2 > 0$.
g' est donc strictement positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, par théorème.

3. h est dérivable comme différence des fonctions f et g dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4x - 4}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, $(x+1) > 0$ et $(x+2)^2 > 0$ donc, par quotient, $h'(x) > 0$ (et $h'(0) = 0$).
Ainsi, h' est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0.
Par théorème, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On en tire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - g(x) = h(x) \geq h(0) = 0$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq g(x).}$

4. f est dérivable en 0 : l'équation de la tangente (T_1) à la courbe de f en 0 admet pour équation :

$$y = f'(0)x + f(0)$$

Or, $f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 0$ et $f(0) = \ln(1) = 0$ donc l'équation de (T_1) est :

$$y = x$$

De même, g est dérivable en 0 et sa courbe admet donc une tangente (T_2) en 0 ayant pour équation :

$$y = x$$

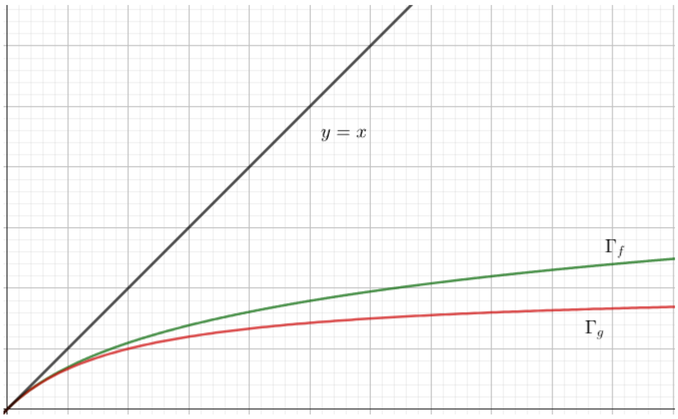
(car $g(0) = 0$ et $g'(0) = \frac{4}{2^2} = 1$).

On a démontré que (T_1) et (T_2) étaient la même droite, d'équation $y = x$.

$\boxed{\text{Les courbes de } f \text{ et } g \text{ admettent une tangente commune en 0, d'équation } y = x.}$

5. $\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est obtenue par translation à partir de la courbe du logarithme selon le vecteur } (-1,0) \text{ (cf cours pour le tracé de la courbe du logarithme).}}$

6. L'enjeu pour cette question :
   - Bien placer la tangente, et bien représenter la tangence commune,
   - Bien placer la courbe de f au dessus de celle de g (d'après la question 3)
   - La courbe de f est celle du logarithme, décalée de 1 vers la gauche.



7. *On l'a déjà fait dans un exercice précédent, donc on peut aller vite.* f_1 est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme différence, et $f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ pour tout $x > -1$, donc f_1' est négative sur $\mathbb{R}_+$, positive sur $]-1, 0]$ et ne s'annule qu'en 0.

$\boxed{\text{Par théorème, } f_1 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et strictement croissante sur }]-1,0].}$

8. La question précédente montre :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1(x) \leq f_1(0) = 0$$
Autrement dit :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x.$$
Soit $\alpha \geq 1$. Pour tout $x \geq 0$, $\alpha x \geq x$ donc $\ln(1+x) \leq x \leq \alpha x$ (d'après la question précédente). Par transitivité :

$\boxed{\forall \alpha > 1, \forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq \alpha x.}$

9. Soit $\alpha \in]0,1[$.
Idée : il s'agit de déterminer si f_α est, comme f_1, à valeurs négatives.

Une étude rapide de f_α montre que celle-ci est dérivable et atteint un maximum en $\frac{1}{\alpha} - 1$ ($\alpha \in]0,1[$ donc $\frac{1}{\alpha} > 1$, donc $\frac{1}{\alpha} - 1 \in \mathbb{R}^+$).
Calculons la valeur de ce maximum :
$$f_\alpha(\frac{1}{\alpha} - 1) = \ln(1 + \frac{1}{\alpha} - 1) - \alpha(\frac{1}{\alpha} - 1) = -1 + \alpha - \ln(\alpha) = -f_1(\alpha - 1).$$

Or, $\alpha \in]0,1[$, donc $\alpha - 1 \in]-1,0[$. Par croissance stricte de f_1 sur $]-1,0]$, $f_1(\alpha - 1) < f_1(0) = 0$.
Ainsi, $f_\alpha(\frac{1}{\alpha} - 1) = -f_1(\alpha - 1) > 0$. Ainsi, en posant $x = \frac{1}{\alpha} - 1$, on a donné un réel $x \geq 0$ tel que

$f_\alpha(x) > 0$, i.e. tel que :

$$\ln(1+x) > \alpha x.$$

$\boxed{\text{Ceci démontre que pour tout réel } \alpha \in]0,1[: \quad \exists x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) > \alpha x, \quad \text{ce qui répond négativement à la question posée.}}$

Exercice 7

1. Par l'absurde, si f s'annulait en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on aurait $f(x_0)f(\frac{1}{x_0}) = 1$ donc $0 = 1$, ce qui est absurde. donc $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+^*.}$

   De plus, $f(1)f(\frac{1}{1}) = 1$ donne $f(1)^2 = 1$, ce qui démontre $\boxed{f(1) \in \{-1, 1\}.}$

2. f ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après 1)), et on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}.$$

   De plus, f est de signe constant sur $[1, +\infty[$, ce signe étant celui de $f(1)$. Soit $x \in]0, 1]$. Alors, $\dfrac{1}{x} \in [1, +\infty[$ donc $f(\dfrac{1}{x})$ est du signe de $f(1)$. Comme de plus $f(x) = \dfrac{1}{f(\frac{1}{x})}$, par quotient, $f(x)$ est également du signe de $f(1)$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est du signe de } f(1) \text{ sur }]0,1] \text{ et sur } [1,+\infty[, \text{ donc sur } \mathbb{R}_+^*.}$

   Montrons maintenant f strictement croissante sur $]0, 1]$.
   Soient x, y deux éléments de $]0, 1]$ tels que $x < y$.
   Par décroissante stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
   De plus, $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ sont éléments de $[1, +\infty[$ car $(x, y) \in]0, 1]^2$.
   Par croissance stricte de f sur $[1, +\infty[$:

$$f(\frac{1}{x}) > f(\frac{1}{y}).$$

   Enfin, $f(\frac{1}{x})$ et $f(\frac{1}{y})$ sont du signe de $f(1)$ (et non nuls), donc tous les deux éléments du même intervalle $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Par décroissance stricte de la fonction inverse sur chacun de ces intervalles :

$$\frac{1}{f(\frac{1}{x})} < \frac{1}{f(\frac{1}{y})}$$

   d'où, vu la relation vérifiée par f :

$$f(x) < f(y).$$

   $\boxed{\text{Ceci démontre bien que } f \text{ est strictement croissante sur }]0,1].}$

3. Montrons que $\dfrac{1}{A}$ majore f. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ donc

$$f(\frac{1}{x}) > A.$$

   f étant de signe constant, $f(1) = -1$ donne que f est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, et non nulle d'après la première question.
   De plus, A étant un minorant de f, $A < f(1) = -1$ donc $A \in \mathbb{R}_-^*$.
   Ainsi, $f(\frac{1}{x})$ et A sont éléments de $\mathbb{R}_-^*$. Par décroissance stricte de la fonction inverse sur cet intervalle, la relation précédente donne :

$$\frac{1}{f(\frac{1}{x})} < \frac{1}{A}$$

d'où :

$$f(x) < \frac{1}{A}.$$

$\boxed{\frac{1}{A} \text{ est bien un majorant de } f.}$

4. $\boxed{\text{Il n'existe pas de telle fonction } h.}$ En effet, par l'absurde, si une telle fonction h existait, on aurait :

$$h(1)h(\frac{1}{1}) = -1$$

soit $h(1)^2 = -1$, ce qui est absurde car le carré de tout réel est positif.

— *Fin du corrigé* —