Lycée Hoche
ECG1 A

2025-2026
Mathématiques

TD de mathématiques n°21 : Variables aléatoires discrètes

Pour commencer

Variables aléatoires finies

Exercice 1 On considère une urne contenant quatre boules indiscernables au toucher portant les numéros:

$$-1, 2, -3 \text{ et } 4$$

Un joueur tire simultanément deux boules dans cette urne et gagne, en euros, la somme des valeurs inscrites sur les deux boules tirées. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X.

Exercice 2 Un joueur lance 3 fois successivement une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus.

Si le nombre de Pile obtenus est pair, alors le joueur est déclaré vainqueur et il gagne 10 € pour chaque Pile obtenu tandis que si le nombre de Pile obtenus est impair, alors le joueur est déclaré perdant et il perd 10 € pour chaque Pile obtenu. On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

(a) Déterminer le support et la loi de probabilité de X.

(b) Quelle est la probabilité de l'événement A : "le joueur gagne"

(c) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de Y.

(d) Reprendre l'exercice en supposant que la pièce est truquée de sorte à obtenir Pile avec probabilité $p = \frac{2}{3}$.

Exercice 3 Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement, une à une et sans remise les boules de cette urne jusqu'à obtention d'une boule noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

(a) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X.

(b) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de Y. Que peut-on remarquer ?

Exercice 4 Un joueur joue à un jeu dont le protocole est le suivant : on parie sur un nombre entier compris entre 1 et 6 et on lance successivement trois dés équilibrés à six faces. On gagne 3 € si le nombre misé sort 3 fois, 2 € si le nombre misé sort 2 fois et 1 € si le nombre misé sort une unique fois, tandis que l'on perd 1 € si le nombre misé n'apparaît pas. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Lois, espérances, variances

Exercice 5 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire (resp. deux boules noires).

On effectue une infinité de tirages successifs avec remise dans cette urne, en ajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire dans l'urne. On note $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si l'on a obtenu au moins une boule noire et à 0 sinon.

(a) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P([X = k])$.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) = 1$ et en déduire la valeur de $P([X = 0])$.

(d) Montrer que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance. Interpréter ce résultat.

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P([Y = k])$.

(f) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

(g) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([Y = k]) = 1$ et en déduire la valeur de $P([Y = 0])$.

(*h*) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance mais n'admet pas de variance.

Exercice 6 Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec les règles suivantes : si on obtient une boule rouge, on arrête, sinon, on remet la boule blanche tirée et on ajoute une boule rouge supplémentaire et on continue jusqu'à obtenir une boule rouge.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et on pose $S = T + 1$.

(*a*) Déterminer la loi de probabilité de T, puis celle de S.

(*b*) Montrer que S admet une espérance et calculer $E(S)$ et en déduire la valeur de $E(T)$.

(*c*) Montrer que S admet une variance et calculer $V(S)$ et en déduire la valeur de $V(T)$.

Exercice 7 Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir Pile est égale à p. On note $q = 1 - p$. On lance une infinité de fois la pièce, et on note $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier changement de côté de la pièce si l'on a obtenu au moins un changement de côté, et égale à 1 si l'on n'a pas obtenu de changement de côté.

Par exemple, si la suite de tirages commence par P, P, P, F, F, P, F, etc, alors $X = 4$.

(*a*) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$.

(*b*) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, calculer $P([X = k])$.

(*c*) En déduire la valeur de $P([X = 1])$.

(*d*) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

(*e*) Montrer que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire simultanément deux boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au maximum (resp. minimum) des deux numéros tirés.

(*a*) Déterminer $X(\Omega)$ et calculer, pour tout $k \in X(\Omega)$, la valeur de $P([X \leq k])$.

(*b*) En déduire la loi de probabilité de X, puis montrer que $E(X) = \frac{2(n+1)}{3}$.

(*c*) Déterminer $Y(\Omega)$ et calculer, pour tout $k \in Y(\Omega)$, la valeur de $P([Y > k])$.

(*d*) En déduire la loi de probabilité de Y, puis montrer que $E(Y) = \frac{n+1}{3}$.

Exercice 9 On dispose de trois boîtes et d'une infinité de jetons. On répartit les jetons un à un et au hasard dans les boîtes. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de jetons placés lorsque pour la première fois deux boîtes sont occupées et Y la variable aléatoire égale au nombre de jetons placés lorsque pour la première fois trois boîtes sont occupées (on admet que les trois boîtes sont occupées presque sûrement).

(*a*) Déterminer la loi de probabilité de X.

(*b*) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

(*c*) Que peut-on dire de la variable aléatoire $Z = X - 1$? Retrouver la valeur de $E(X)$ obtenue en (2).

(*d*) Quel est le support de la variable aléatoire Y ?

(*e*) Pour tout $k \geq 3$, calculer $P([Y = k])$ des trois manières suivantes :

  (*i*) en utilisant le système complet d'événements $([X = i])_{i \geq 2}$.

  (*ii*) En calculant d'abord $P([Y > k])$ pour tout $k \geq 2$ en utilisant la formule du crible de Poincaré.

  (*iii*) Par un calcul direct avec un argument de dénombrement.

(*f*) Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.

(*a*) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!], P([X = k]) = P([X \geq k]) - P([X \geq k + 1])$.

(*b*) En déduire que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P([X \geq k])$.

(c) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On effectue une infinité de tirages successifs avec remise dans cette urne.

On note $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier numéro inférieur ou égal au numéro suivant.

Déterminer la valeur de $E(X)$ sans déterminer la loi de probabilité de X.

Lois, espérances, variances (calcul)

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!], P([X = k]) = \alpha k$.

(a) Déterminer la valeur de α.

(b) Déterminer la valeur de $E(X)$.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(d) En déduire la valeur de $V(X)$.

(e) On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la valeur de $E(Y)$.

Exercice 12 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P([X = k]) = \left(\frac{3}{5}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

(a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) = 1$.

(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, déterminer la valeur de $E(X)$.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Si oui, déterminer la valeur de $V(X)$.

Exercice 13 Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}, P([X = k]) = q^{k-1}p + p^{k-1}q$.

(a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k]) = 1$.

(b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

(c) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \frac{q}{p^2} + \frac{p}{q^2} - 2$.

Exercice 14 Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP([X = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} P([X > k]) - nP([X > n])$.

(b) Si X admet une espérance, montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nP([X > n]) = 0$ et en déduire que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P([X > k])$.

(c) Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P([X > n])$ converge, alors X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P([X > k])$.

(d) Soit $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. À l'aide de la question précédente, proposer une méthode alternative de calcul de $E(X)$.

Suites de variables aléatoires discrètes

Exercice 15 Un mobile se déplace sur un axe gradué selon les règles suivantes. À l'instant initial, il se trouve en $x = 0$. Si à l'instant $n \geq 0$ le mobile est en $x = k$, alors il sera à l'instant $n + 1$ en $k + 1$ avec probabilité $p \in]0, 1[$, sinon il retournera en $x = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

(a) Donner la loi de probabilité de X_1.

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!], P([X_n = k]) = pP([X_{n-1} = k-1])$.

(d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = pE(X_{n-1}) + p$.

(e) En déduire explicitement $E(X_n)$ en fonction de n et p.

Exercice 16 Une urne opaque contient initialement une boule blanche et une boule noire, indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. À chaque tirage, on ajoute en plus une boule supplémentaire de la couleur de la boule tirée avant d'effectuer le tirage suivant. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages.

(a) Reconnaître la loi de probabilité de X_1, puis déterminer soigneusement la loi probabilité de X_2.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le support $X_n(\Omega)$ de X_n.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $P_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k])$ et $P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = k])$.

(d) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n$ suit la loi uniforme sur $X_n(\Omega)$.

(e) Déterminer les valeurs de $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Lois discrètes usuelles finies

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On effectue n tirages successifs sans remise dans l'urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule numéro 1.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Déterminer les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On pose $Y = e^X$.

Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 19 Soit $p \in]0, 1[$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de $E(X^n)$ et $V(X^n)$.

Exercice 20 Soit $p \in]0, 1[$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $P([X = 1]) = p$. Déterminer la loi de $Y = \frac{1-X}{2}$ et celle de $Z = \frac{1+X}{2}$, puis calculer $E(Y), E(Z), V(Y)$ et $V(Z)$.

Exercice 21 Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9 . On effectue 9 tirages successifs d'un jeton dans cette urne, avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres pairs obtenus.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) En déduire sans calcul l'espérance et la variance de X.

Exercice 22 Soient $n \in \mathbb{N}, p \in]0, 1], X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y = \frac{1}{X+1}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ On pose $Y = \alpha^X$. Calculer $E(Y)$.

Lois discrètes usuelles infinies

Exercice 24 On lance indéfiniment une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'apparition de Pile est $p = \frac{2}{3}$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier Pile et Y la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus avant l'obtention du premier Pile.

(a) Quel est le lien entre X et Y ? En déduire la loi de probabilité de Y.

(b) Montrer que Y possède une espérance et une variance et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On tire successivement et avec remise une boule dans cette urne jusqu'à obtenir une boule dont le numéro est supérieur ou égal à p et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Quelle est la loi de probabilité de X ? En déduire sans calcul les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 26 Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

La variable aléatoire X prend-elle plus souvent des valeurs paires ou impaires ?

Exercice 27 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité $P([X = k]) = \frac{a}{3^k}$.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) La variable X a-t-elle plus de chances de prendre une valeur paire ou une valeur impaire ?

(c) Déterminer, si elles existent, l'espérance et la variance de X.

Exercice 28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Un bureau de poste comporte n guichets. On suppose que le nombre X de clients arrivant en une heure au bureau de poste suit la loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que les clients choisissent leur guichet au hasard et que ces choix sont indépendants.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note X_i la variable aléatoire réelle égale au nombre de clients passant par le guichet n°i en une heure.

(a) Soit $p, q \in \mathbb{N}$. Calculer $P_{[X=q]}\left([X_i = p]\right)$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $P\left([X_i = p]\right)$.

(c) Reconnaître alors la loi de X_i et donner $E\left(X_i\right)$ puis $V\left(X_i\right)$.

Pour continuer

Variables aléatoires finies

Exercice 29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient dix boules blanches et n boules noires. Un joueur effectue deux tirages avec remise dans cette urne. Chaque boule blanche tirée rapporte 2 et chaque boule noire tirée fait perdre 3. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X.

Exercice 30 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges. 10% des jetons sont bleus et il y a trois foix plus de jetons blancs que de jetons bleus. Un joueur tire au hasard un jeton dans cette urne : un jeton rouge rapporte x, un jeton blanc rapporte x^2 et un jeton bleu fait perdre x^3. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

(a) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X en supposant que $x = 2$.

(b) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X en supposant que $x = 5$.

(c) On propose au joueur de choisir la valeur $x \in \mathbb{R}_+$ avant de commencer à jouer. Quelle valeur optimale choisir pour optimiser les gains sur le long terme ?

Exercice 31 Un écolier vend des tickets de tombola qui se présentent par carnet de 10. Dans chaque carnet, un et un seul ticket sera gagnant. Un acheteur décide d'acheter deux tickets.

S'il décide d'acheter les deux tickets dans le même carnet, on note X la variable aléatoire égale au nombre de tickets gagnants. S'il décide d'acheter les deux tickets dans des carnets différents, on note Y la variable aléatoire égale au nombre de tickets gagnants.

(a) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de X.

(b) Déterminer le support, la loi de probabilité et l'espérance de Y.

(c) Quelle stratégie d'achat est préférable pour un acheteur qui souhaite maximiser ses chances de gagner ? pour un grand nombre d'acheteurs qui souhaitent maximiser leurs gains ?

Lois, espérances, variances

Exercice 32 Une urne contient des boules bleues et vertes : la proportion de boules bleues est notée b. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne jusqu'au premier changement de couleur. On note X le nombre de tirages effectués et Y le nombre de boules bleues obtenues.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance.

(b) Déterminer $Y(\Omega)$.

(c) Pour tout $k \geq 1$, décrire l'événement $[Y = k]$ et calculer $P([Y = k])$.

(d) En déduire la loi de Y et l'espérance de Y.

Exercice 33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue $2n$ tirages successifs sans remise dans cette urne.

On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la dernière boule noire.

(a) Déterminer $X(\Omega)$.

(b) Déterminer la loi de probabilité de X.

(c) Déterminer la valeur de $E(X)$ (indication : on pourra penser à la formule de Pascal généralisée).

Exercice 34 Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![1, N]\!]$. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.

On tire simultanément n boules dans cette urne. On suppose que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

On considère la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ égale au plus grand numéro tiré.

(a) Déterminer $X(\Omega)$ et calculer, pour tout $k \in X(\Omega)$, la valeur de $P([X \leq k])$.

(b) En déduire, pour tout $k \in X(\Omega)$, la valeur de $P([X = k])$.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{j=n-1}^{N-1} \binom{j}{n-1} = \binom{N}{n}$.

Exercice 35 On considère une pièce de monnaie truquée de sorte à ce que la probabilité d'obtenir Pile soit égale à $p = \frac{6}{7}$. On lance successivement et indépendamment cette pièce jusqu'à obtenir pour la première fois deux Pile de suite (on admet que ceci se produit presque-sûrement).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués. Par exemple, si la suite de lancers obtenus est PFFPFPFPP, alors X prend la valeur 9. On note A l'événement : "obtenir Pile au 1^{er} lancer".

(a) Calculer $P([X = 2]), P([X = 3])$ et $P([X = 4])$.

(b) Pour tout $k \geq 2$, exprimer $P_A([X = k + 2])$ en fonction de $P([X = k])$.

(c) Pour tout $k \geq 2$, exprimer $P_{\bar{A}}([X = k + 2])$ en fonction de $P([X = k + 1])$.

(d) En déduire que pour tout $k \geq 2, P([X = k + 2]) = \frac{1}{7}P([X = k + 1]) + \frac{6}{49}P([X = k])$.

(e) En déduire la loi de probabilité de X.

(f) Montrer que X possède une espérance et calculer $E(X)$.

Lois, espérances, variances (calcul)

Exercice 36 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P([X = k]) = \frac{\alpha}{k(k+1)}$.

(a) Déterminer la valeur de α.

(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance? Si oui, déterminer la valeur de $E(X)$.

(c) Déterminer la probabilité de réalisation de l'événement A : "la variable aléatoire X prend une valeur paire".

Exercice 37 Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P([X=k]) = p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}$.

(a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k]) = 1$.

(b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

(c) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = 2\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q} - 1\right)$.

Suites de variables aléatoires discrètes

Exercice 38 Une boîte A contient deux jetons numérotés 0 et une boîte B contient deux jetons numérotés 1 . On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on répète n fois de suite le protocole suivant :

- on tire au hasard un jeton dans chaque boîte (simultanément),
- on échange de boîte les deux jetons tirés.

À l'issue de ces n échanges, on note X_n la variable aléatoire égale à la somme de chiffres inscrits sur les jetons présents dans l'urne A.

(a) Donner la loi de probabilité de X_1, puis celle de X_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P([X_n=0]) \\ P([X_n=1]) \\ P([X_n=2]) \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C_{n+1} = MC_n$ pour tout $n \geq 2$.

(c) En déduire l'espérance de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}MP$ et en déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) En déduire la loi de probabilité de X_n.

Exercice 39 Soit $r \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$. On considère une urne contenant, pour tout $k \in [\![1, r]\!], k$ boules numérotées k.

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne et à chaque fois qu'une boule de numéro $k \in [\![1, r]\!]$ est tirée, chaque boule de l'urne dont le numéro est inférieur ou égal à k est immédiatement remplacée par une boule de numéro k.

L'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ égale au numéro obtenu lors du tirage numéro n. Enfin, on considère la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ égale au rang d'apparition de la première boule de numéro r tirée si l'on tire au moins une boule de numéro r et égale à 0 sinon.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P([X_{n+1}=r]) = \frac{r-1}{r+1}P([X_n=r]) + \frac{2}{r+1}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P([X_n=r])$ explicitement en fonction de n.

(c) Déterminer la valeur de $P([X=1])$.

(d) Pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, exprimer l'événement $[X=k]$ en fonction des événements $[X_k=r]$ et $[X_{k-1}<r]$.

(e) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, la valeur de $P([X=k])$. En déduire la valeur de $P([X=0])$.

(f) Quelle est la loi de probabilité de X ? Montrer que X admet une espérance et déterminer la valeur de $E(X)$.

Lois discrètes usuelles finies

Exercice 40 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On pose $Y = \alpha^X$.

Calculer $E(Y)$.

Exercice 41 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires et une boule rouge. On tire simultanément n boules dans cette urne.

On considère l'événement A : "on a tiré la boule rouge" et on pose $X = \mathbf{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Déterminer les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 42 Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On pose $Y = n - X$.

(a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

(b) En déduire sans calculs les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 43 Deux joueurs A et B jouent avec une pièce équilibrée. Chaque joueur lance la pièce n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note X_A le nombre de Pile obtenus par le joueur A et X_B le nombre de Pile obtenus par le joueur B.

Déterminer la probabilité de l'événement : "les deux joueurs obtiennent le même nombre de Pile".

Exercice 44 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge. On tire successivement n boules avec remise dans cette urne.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a changement de couleur au i-ème tirage si la boule tirée au i-ème tirage n'est pas de la même couleur que la boule tirée au $(i-1)$-ème tirage.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de changements de couleur obtenus lors des n tirages.

(a) Déterminer $X(\Omega)$ et montrer que pour tout $k \in X(\Omega), P([X = k]) = \frac{\binom{n-1}{k} \times 3 \times 2^k}{3^n}$.

(b) Reconnaître la loi de probabilité de X.

(c) En déduire sans calculs les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Lois discrètes usuelles infinies

Exercice 45 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $p = P([X = 1]) \in]0, 1[$.

On suppose que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, P_{[X>k]}([X > k + \ell]) = P([X > \ell])$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, P([X > k + 1]) = P([X > k])P([X > 1])$.

(b) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}, P([X > k])$ explicitement en fonction de k et p.

(c) En déduire la loi de probabilité de X.

Exercice 46 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules blanches et une boule noire.

On considère une urne $\mathcal{V}$ contenant une boule noire.

On tire une boule dans $\mathcal{U}$ et on la remet dans $\mathcal{V}$.

On effectue alors une infinité de tirages successifs avec remise dans $\mathcal{V}$.

L'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à expliciter.

On considère la variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ égale au nombre de tirages effectués dans $\mathcal{V}$ au moment où, pour la première fois, on extrait une boule noire de l'urne $\mathcal{V}$ (on admet que l'événement : "ne jamais tirer de boule noire dans l'urne $\mathcal{V}''$ est négligeable et on le néglige).

La variable aléatoire X suit-elle une loi géométrique?

Exercice 47 Soit $p \in]0, 1[$ et $\alpha \in]0, \frac{1}{1-p}[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On pose $Y = \alpha^X$.

Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$.

Exercice 48 Soit $a \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = a \times \frac{k\lambda^k}{k!}$$

Déterminer la valeur de a, puis montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 49 Soit $\lambda > 0, \alpha > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y = \frac{1}{X+1}$ et $Z = \alpha^X$.

Montrer que Y et Z admettent une espérance et calculer $E(Y)$ et $E(Z)$.