Programme de colle n^o 26 : Convexité (chapitre complet). Variables aléatoires discrètes (début).

*Semaine du lundi **11 mai**.*

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Convexité

26.1 Position relative de deux courbes (rappel). Notion de fonction concave, convexe. Interprétation de $tx+(1-t)y$ où x et y sont des réels fixés, et où t parcourt $[0,1]$. Soit I un intervalle, une fonction f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I. Les fonctions affines sont convexes et concaves.

26.2 Convexité des fonctions dérivables : une fonction f dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si f' est croissante, si et seulement si la courbe de f est au dessus de toutes ses tangentes sur I (et énoncé similaire poour la concavité).

26.3 Les inégalités classiques $e^x \geq x+1$ et $\ln(x) \leq x-1$ sont des inégalités de convexité.

26.4 Convexité des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$: une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est convexe sur un intervalle I si et seulement si f'' est positive sur I (énoncé similaire pour la concavité).

L'hypothèse porte sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, conformément au programme...

26.5 Notion de point d'inflexion. Points d'inflexions des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

26.6 Convexité et recherche d'extrema : soit f une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. Alors, tout point critique de f est un minimum global de f sur I. Énoncé similaire pour les fonctions concaves.

Hypothèse $\mathcal{C}^2$ conformément au programme...

Variables aléatoires discrètes

26.7 Notion de variable aléatoire sur un espace probabilisé. Support d'une variable aléatoire. Événements associés à une variable aléatoire.

On pourra poser dès cette semaine des exercices de probabilités (proches du programme précédent) dans lesquels des variables aléatoires sont utilisées pour définir des événements.

26.8 Notion de variable aléatoire discrète finie ou infinie.

26.9 Variable aléatoire discrète finie ou infinie. Toute variable aléatoire à valeurs entières (i.e. : à support inclus dans $\mathbb{Z}$) est discrète. Exemple de variable aléatoire discrète à valeurs non entières.

26.10 Système complet d'événements $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ associé à une variable aléatoire discrète X. Corollaire : Soit X une variable aléatoire discrète, alors $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = 1$ si X est finie, et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}([X=x_k])$ converge et a pour somme 1, où $X(\Omega)=\{x_k, k\in\mathbb{N}\}$ sans répétition, si X est infinie.

26.11 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète. Proposition (admise) : condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une variable aléatoire de loi donnée. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Propriétés vérifiées par toute telle fonction de répartition. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète caractérise sa loi.

L'énoncé du cours disant que deux variables aléatoires discrètes ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition est problématique avec la définition du support au programme, mais trop important pour ne pas être mentionné. Les élèves ne sont pas attendus sur ce point.

Quelques questions de cours

1. La colle commencera obligatoirement par une question de cours Python des PC17 à ce PC.
2. Énoncer la proposition caractérisant les fonctions dérivables convexes (resp. concaves) sur un intervalle. Montrer l'implication démontrée dans le cours (de l'énoncé sur la convexité). (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis dans le cas général ou une méthode intégrale dans le cas $\mathcal{C}^1$)
3. Montrer que : $\forall (x,y)\in]1,+\infty[^2, \ln(\frac{x+y}{2}) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.
4. Énoncer la définition portant sur la notion de point d'inflexion, puis la proposition caractérisant les points d'inflexions des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer les points d'inflexions de $x \mapsto x\exp(-\frac{x^2}{2})$.

5. Énoncer les propositions relatives aux points critiques des fonctions convexes ou concaves et de classe $\mathcal{C}^2$, et démontrer ces propositions.
6. Définir la notion de variable aléatoire réelle. Énoncer la proposition relative aux événements associés à une variable aléatoire réelle, et démontrer les trois premiers points.
7. Rappeler la définition des événements $[X = x]$ et $[X \leq x]$, où X est une variable aléatoire et x un réel. Montrer que, pour tout variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé d'univers noté Ω, $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Énoncer le corollaire immédiat (prop. 14) de cette proposition.
8. Définir la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le rang du premier pile lors d'une succession infinie de lancers d'une pièce à Pile ou Face, ayant probabilité $p \in]0, 1[$ de faire Pile, en admettant que l'on obtient ainsi toujours au moins une fois Pile (et que X est donc bien définie). *Élèves : c'est donc plus simple que ce qui a été fait en classe (exemple 17) mais vous devez légèrement adapter la démonstration (le support devient* $\mathbb{N}^*$*).*
9. Définir la notion de fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète. Représenter (sans démonstration) le graphe de la fonction de répartition de la variable aléatoire donnant la face obtenue lors du lancer d'un dé à 6 faces, dont l'équilibre des faces est donné par l'interrogation. Énoncer la proposition (21) donnant les propriétés vérifiées par la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète quelconque. Démontrer les deux premiers points.
10. Énoncer la proposition (22) donnant les propriétés vérifiées par la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète quelconque. Démontrer l'énoncé portant sur sa limite en $+\infty$.