

# Rappel sur les espaces vectoriels et introduction au chapitre 23

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

## Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base

**Définition 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Supposons donné une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Pour tout vecteur  $x \in E$ , il existe d'unique réels  $x_1, \dots, x_n$  (appelées coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ ) tels que :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

On appelle alors **matrice des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$**  la matrice colonne notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et donnée par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Idée : cet outil nous permettra progressivement d'étudier tout espace vectoriel de dimension finie (i.e., admettant une "base finie", donc une base avec nos définitions) en se ramenant à des problèmes matriciels.

## Les espaces vectoriels de référence

### Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Ils ont été étudiés lors du chapitre 17.

Penchons nous à nouveau sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  à travers quelques exercices.

**Exercice 2.** On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Soit  $F$  l'ensemble :

$$F = \{(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda X_1 + \mu X_2 + \gamma X_3 = 0_{3,1}\}.$$

- (i) Donner un élément de  $F$ .
- (ii) Donner un autre élément de  $F$ .
- (iii) A-t-on  $(2, -1, 3) \in F$  ?
- (iv) Montrer que  $F$  est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.  
*On en déduit que c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , par un théorème du cours.*
- (v) Déterminer une base de  $F$  ainsi que sa dimension.
- (vi) Représenter  $F$  dans un repère orthonormé à 3 axes (en perspective).

**Exercice 3.** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .

- (i) Donner la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$ , et déterminer la matrice des coordonnées de  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  dans cette base.
- (ii) On pose  $u = (1, 1, 0)$ ,  $v = (1, 0, 1)$  et  $w = (2, 2, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (iii) Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((1, 2, 3))$ .

(iv) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y, z))$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .

Commençons à parler d'applications linéaires.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x + z) \end{array} .$$

(v) Montrer que  $f$  vérifie la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v). \quad (P)$$

On dit que  $f$  est une **application linéaire**.

(vi) Montrer que  $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^2}$  en revenant à la définition de  $f$ , puis en utilisant uniquement la propriété de linéarité de  $f$ .

(vii) Montrer que l'ensemble  $\text{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  en revenant à la définition de  $f$ , puis en utilisant uniquement la propriété de linéarité (P) de  $f$ .

**On dira que  $\text{Ker}(f)$  est le noyau de l'application linéaire  $f$ .**

(viii) Soit  $\mathcal{C}'$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f(v)) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v).$$

On remarque que la connaissance de cette matrice  $A$  permet de retrouver entièrement  $f$ , car un vecteur est uniquement déterminé par la matrice de ses coordonnées dans une base donnée.

On dira que  $A$  est la **matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$** .

(ix) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que l'on déterminera, telle que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2, \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(g(v)) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v).$$

On peut très facilement vérifier que  $g$  est linéaire. On dira que  $g$  est **l'application linéaire associée à  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$** .

On verra plus généralement que les application linéaires (les applications vérifiant la propriété (P) entre espaces vectoriels de dimension finie, i.e. admettant une base) sont exactement les applications données par une matrice avec le procédé décrit ci-dessus.

**Définition 4.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, et  $f : E \rightarrow F$  une application.

On dit que  $f$  est une application **linéaire** si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v).$$

**Remarque.** À gauche de l'égalité, les opérations  $+$  et  $\cdot$  sont effectuées dans l'espace vectoriel  $E$ . À droite, elles le sont dans  $F$ .

**Remarque.** Dans le cours, on adoptera une définition légèrement différente (la "définition" ci-dessus sera une caractérisation).

### L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

Muni des opérations matricielles "+" (somme de matrices) et "." (produit d'une matrice par un réel), l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  des matrices réelles à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est un espace vectoriel.

Cet espace vectoriel admet une base appelée la base canonique.

Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $E_{i,j}$  la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient d'indice  $(i, j)$  qui vaut 1.

La base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est la base :

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,p}, E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{2,p}, \dots, E_{n,1}, E_{n,2}, \dots, E_{n,p}).$$

Elle est de cardinal  $np$  donc  $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$ .

Par exemple, pour  $n = p = 2$ , on obtient la base suivante :

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

**Exercice 5.** Vérifier que la famille de vecteurs ci-dessus est bien une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 6.** Montrer que  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 7.** (i) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(ii) On pose  $n = 2$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer une base de  $\mathcal{C}_A$  et donner sa dimension.

On va maintenant voir d'autres espaces vectoriels classiques.

### L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes. Alors,

$$P + Q : x \mapsto P(x) + Q(x)$$

est également un polynôme. De plus, pour tout réel  $\lambda$ ,

$$\lambda \cdot P : x \mapsto \lambda \times P(x)$$

est également un polynôme.

**Exercice 8.** Donner deux exemples.

**Proposition 9.** Muni de ces opérations  $+$  et  $\cdot$ , l'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes réels est un espace vectoriel.

Rappel : cela signifie que toutes les propriétés de la proposition et définition 3 du chapitre 17 sont vraies pour les polynômes.

Le **polynôme nul** est simplement la fonction nulle  $0_{\mathbb{R}[X]} : x \mapsto 0$ .

**Proposition 10.** L'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  n'admet pas de base de cardinal fini. On dit que c'est un espace vectoriel de dimension infinie (HP).

**Démonstration.** En exercice : par l'absurde et trouver une contradiction avec les degrés □

Pour cette raison, le programme nous fait plutôt travailler avec :

### L'espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[X]$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et  $\lambda, \mu$  deux réels. Alors :

$$\deg(\lambda P) = \begin{cases} & \leq n. \end{cases}$$

et de même,  $\deg(\mu Q) \leq n$ .

D'après les propriétés du degré :

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(\mu Q)) \leq n.$$

De plus,  $0_{\mathbb{R}[X]} \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathbb{R}_n[X]$  est bien une partie de  $\mathbb{R}[X]$ .

Ceci démontre la :

**Proposition 11.**  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .

En particulier,  $\mathbb{R}_n[X]$  est un espace vectoriel, muni de l'addition des polynômes et du produit d'un polynôme par un réel.

**Proposition 12.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, la famille  $(1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , appelée la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . En particulier,  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$ .

**Démonstration.** En exercice : c'est le théorème d'unicité des coefficients.  $\square$

**Exercice 13.** Déterminer la matrice des coordonnées de  $1 + 2X + X^2$  dans la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 14.** Montrer que  $\mathcal{B} = (X - 1, X^2 - X, X^2 + 1)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer la matrice des coordonnées de  $1 + X$  dans cette base.

**Exercice 15.** (HP) On note toujours  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Soit  $D$  la dérivation vue comme application  $D : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$ .

- (i) Déterminer les matrices des coordonnées de  $D(1)$ ,  $D(X)$  et  $D(X^2)$  dans la base  $\mathcal{C}$ . On notera ces matrices colonnes respectivement  $C_1, C_2$  et  $C_3$ .
- (ii) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre,  $C_1, C_2$  et  $C_3$ . Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(D(P)) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(P).$$

(iii) L'application  $D$  est-elle linéaire ?

L'idée à retenir est la suivante :

La correspondance entre matrices et applications linéaires entrevue dans l'exercice 3 est valable dans un cadre très général : celui des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

### L'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit  $I$  un intervalle réel.

On note  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  l'ensemble  $\mathbb{R}^I$  des fonctions réelles  $I \rightarrow \mathbb{R}$  (dont le domaine de définition est  $I$ , pas seulement "définies sur  $I$ ").

On dispose d'opérations d'espaces vectoriels sur cet ensemble, définies par :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

et

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \times f(x)$$

(où  $f, g$  sont des éléments de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $\lambda$  un réel).

Le vecteur nul est ici  $0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$ .

L'espace vectoriel  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  ainsi obtenu est de dimension infinie... Mais on peut tout de même constater quelques points.

À quelles propriétés du cours ces propositions font-elles référence ?

**Proposition 16.** *L'ensemble  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  des fonctions  $I \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .*

Réponse :

**Proposition 17.** *Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ .*

Considérons l'application  $\phi : \begin{cases} \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_a^b f(t)dt \end{cases}$ . Alors,  $\phi$  est linéaire :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}(I, \mathbb{R}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g).$$

Réponse :

**Proposition 18.** *L'ensemble  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  des fonctions  $I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .*

Réponse :

**Proposition 19.** *Considérons l'application  $D : \begin{cases} \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$ . Alors,  $D$  est linéaire :*

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{D}(I, \mathbb{R}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g).$$

Réponse :

Pour finir, un petit calcul dans cet espace vectoriel.

**Proposition 20.** *Soit  $(E) : y'' + ay' + by = 0$  une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants définie sur un intervalle  $I$  non trivial (non vide, non réduit à un point). Supposons le discriminant de son équation caractéristique strictement positif, et soient  $\alpha$  et  $\beta$  ses deux solutions.*

Notons  $f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{\alpha x} \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{\beta x} \end{cases}$ .

Alors, l'ensemble  $\text{Sol}(E)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  de dimension 2, dont  $(f, g)$  est une base.