

Devoir maison n°7

À rendre le mardi 26 mai 2026

Exercice 1

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant Pile avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et Face avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant Pile à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant Face à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis à la lancer indéfiniment.

On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience, et on suppose bien-sûr les différents lancers d'une même pièce indépendants.

Pour $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'événement "on a choisi la pièce numérotée i ".

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement : "on obtient Pile au lancer numéro k " et $F_k = \overline{P_k}$.

On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier Pile
- Y donnant le rang d'apparition du premier Face

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. *Loi de X .*

(a) Donner $X(\Omega)$. *On se contentera d'une brève justification.*

(b) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

(c) Montrer que : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

5. (a) Montrer que pour tout $j \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

(b) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

(c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

(a) Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

(b) Montrer que $\mathbb{P}([Z = 1]) = \frac{2}{3}$.

(c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

(d) En déduire que :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \quad \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice 2

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec probabilité $\frac{1}{3}$.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant nos expériences, dont on admet l'existence.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de face obtenus avant l'obtention du deuxième pile.

- (a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 2]$ puis calculer leur probabilité.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la probabilité de faire exactement une fois Pile lors des n premiers lancers.
(c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile. Si n désigne le nombre de Face obtenus, on place $n + 1$ boules indiscernables au toucher, et numérotées de 0 à n , dans une urne. On pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.

On pose $V = X - U$.

- (a) Déterminer l'ensemble $U(\Omega)$ des valeurs prises par U .
(b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in U(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}(U = k)$.
(c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n]).$$

puis

$$\mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- (d) Montrer que U admet une espérance et une variance, et les calculer.
- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par V .
(b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in V(\Omega)$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k])$.
(c) En déduire la loi de V .
- Montrer que les variables U et V sont indépendantes.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- Le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile. On note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus.
- Le joueur B dispose d'une pièce faisant Pile avec probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile. On note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus.
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B , et sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est *équilibré* si les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

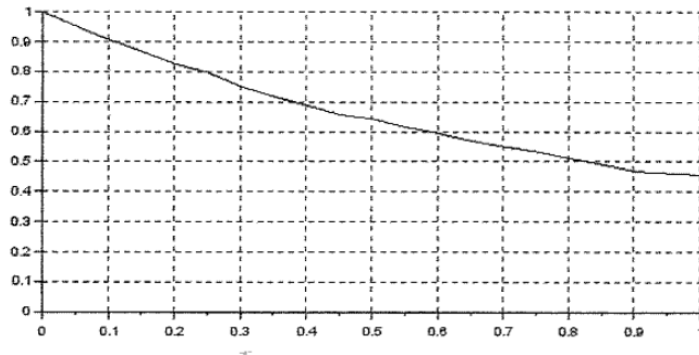
5. (a) Écrire une fonction Python d'entête `def simuleX()`: simulant la variable aléatoire X (et renvoyant le résultat obtenu).
- (b) On suppose qu'on dispose d'une fonction `simuleY` qui prends en argument un réel $p \in]0, 1[$ et qui simule la variable aléatoire Y pour cette valeur de p . Que renvoie la fonction suivante ?

```

1     def mystere(p):
2         r=0
3         N=10**4
4         for k in range(N):
5             x=simuleX()
6             y=simuleY(p)
7             if x<=y:
8                 r+=1/N
9         return(r)

```

- (c) Écrire un code Python permettant d'afficher un tracé des valeurs de `mystere(p)` en fonction de p sur $]0, 1[$.
- (d) Le code précédent renvoie le graphique suivant. Conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.



6. Soit Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B .

- (a) Reconnaître la loi de Z . Préciser son espérance et sa variance.
- (b) Exprimer Y en fonction de Z . En déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y , et préciser leurs valeurs.
- (c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.

7. (a) Montrer $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}([Y \geq n])$.

(b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de p le jeu est-il équilibré ?

Exercice 3 *Facultatif*

Pour tout entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

1. Étude de f_n . Soit n un entier naturel.

- (a) Montrer que f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[n, +\infty[$ et déterminer f'_n . Quel est le sens de variation de f_n ?
- (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- (c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$. On pourra considérer un encadrement de $f_n(x)$ appliqué en $x = u_n$.

3. (a) Utiliser la question 2b) pour compléter le script Python suivant afin qu'il permette d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
1 import numpy as np
2 n=0
3 while ...
4 n=...
5 print(n)
```

(b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs 55, 70 ou 85. Préciser laquelle en prenant 2, 3 comme valeur approchée de $\ln(10)$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

- (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
- (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
- (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$.

— fin —