

Correction du DM n°7

Exercice 1

1. (a) Si la pièce numéro 0 est tirée (ce qui est bien possible), toute valeur $n \in \mathbb{N}^*$ peut être prise par X (par exemple, si les lancers commencent par une succession de $n - 1$ côtés Face suivie d'un pile). Si la pièce 2 est tirée (ce qui est possible), X prend la valeur 0 à coup sûr.

Finalement, $\mathbb{N} \subset X(\Omega)$.

X étant clairement à valeurs entières : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

- (b) $[X = 1]$ est l'événement "Le premier lancer de la pièce choisie tombe sur Pile".

(A_0, A_1, A_2) forme clairement un système complet d'événements. Le choix des pièces étant fait en situation d'équiprobabilité, ces événements ont tous une probabilité de $\frac{1}{3} \neq 0$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}([X = 1]) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}([X = 1]) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}([X = 1]).$$

Mais la pièce 2 faisant Face à coup sûr, $\mathbb{P}_{A_2}([X = 1]) = 0$ (le premier lancer n'est pas un Pile).

La pièce 1 faisant Pile à coup sûr, $\mathbb{P}_{A_1}([X = 1]) = 1$.

La pièce 0 étant équilibrée, $\mathbb{P}_{A_0}([X = 1]) = \frac{1}{2}$ (le premier lancer tombe sur Pile avec probabilité $\frac{1}{2}$).

Donc $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

La même application de la formule des probabilités totales qu'à la question précédente donne :

$$\mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}([X = n]) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}([X = n]) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}([X = n]).$$

Mais $n \geq 2$ donc $\mathbb{P}_{A_1}([X = n]) = \mathbb{P}_{A_2}([X = n]) = 0$ (si la pièce fait Pile à coup sûr ou Face à coup sûr, Pile tombe dès le premier lancer ou ne tombe jamais, donc ne tombe pas au n ième lancer car $n \geq 2$).

De plus, $\mathbb{P}_{A_0}([X = n]) = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ car on peut utiliser la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ pour déterminer la probabilité d'obtenir le premier Pile au n ième lancer avec la pièce numéro 0, celle-ci ayant probabilité $\frac{1}{2}$ de faire Pile.

Finalement,

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- (d) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc par théorème, $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X = k])$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

Donc :

$$\mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1.$$

D'où, avec les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = 0]) &= 1 - \mathbb{P}([X = 1]) - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \times 2 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

(1) : par linéarité.

(2) : par changement de variable

(3) : on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

Donc $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{3}$.

2. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc X admet une espérance ssi $\sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}([X = k])$ converge absolument.

Cette série étant à terme positifs, il suffit pour cela qu'elle converge ($\forall k \geq 0, k \geq 0$ et $\mathbb{P}([X = k]) \geq 0$).

Par non incidence des premiers termes sur la convergence d'une série, il suffit pour cela que $\sum_{k \geq 2} k\mathbb{P}([X = k])$ converge.

Or :

$$\forall k \geq 2, k\mathbb{P}([X = k]) = k \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{6} \cdot k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

La série $\sum_{k \geq 2} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ converge comme série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ (au rang du premier terme près) donc par linéarité, $\sum_{k \geq 2} k\mathbb{P}([X = k])$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k]) = 0\mathbb{P}([X = 0]) + 1\mathbb{P}([X = 1]) + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Enfin :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1 = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} - 1 = 3.$$

Finalement,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = 1.$$

3. **Montrons que X admet un moment d'ordre 2**, c'est à dire que X^2 admet une espérance. X^2 est à valeurs entières, donc c'est le cas si et seulement si $\sum_{k \geq 0} k^2\mathbb{P}([X = k])$ converge absolument, d'après le théorème de transfert.

La série $\sum_{k \geq 0} k^2 \mathbb{P}([X = k])$ est à termes positifs, donc il suffit pour cela qu'elle converge ($\forall k \geq 0, k^2 \geq 0$ et $\mathbb{P}([X = k]) \geq 0$).

Enfin, il suffit pour cela que $\sum_{k \geq 2} k^2 \mathbb{P}([X = k])$ converge. Or :

$$\forall k \geq 2, k^2 \mathbb{P}([X = k]) = k(k-1) \mathbb{P}([X = k]) + k \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{12} \cdot k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + k \mathbb{P}([X = k]).$$

La série $\sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ converge en tant que série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, et $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$ converge d'après la question précédente, donc par linéarité :

$\sum_{k \geq 2} k^2 \mathbb{P}([X = k])$ converge et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{12} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k])$$

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}([X = k]) = 0 + 1^2 \mathbb{P}([X = 1]) + \frac{1}{12} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} = \dots = \frac{7}{3}.$$

(On a vu lors de la question précédente : $\sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{2}$).

Par la formule de Koenig-Huygens,

$$X \text{ admet une variance et } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}.$$

4. Le rôle des côtés Pile et Face est interchangeable dans l'expérience aléatoire considérée, quitte à échanger le rôle des pièces 1 et 2 qui sont choisies avec la même probabilité (la pièce 0 est équilibrée). Donc pour tout entier k , la probabilité d'avoir le premier Pile au k ième lancer est la même que celle d'avoir le premier Face au k ième lancer.

ainsi, X et Y suivent la même loi.

5. (a) Soit $j \geq 2$. $[Y = j] \cap [X = 1]$ est réalisé si et seulement si le premier lancé donne Pile, et le premier Face a lieu lors du j ième lancer.

Mais $[Y = j]$ implique $[X = 1]$ (*rappel : on dit qu'un événement A implique un événement B si $A \subset B$) car si le premier face a lieu au j ième lancer, le premier est nécessairement un Pile ($j \geq 2$).*

Donc $[Y = j] \cap [X = 1] = [Y = j]$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j]).$$

(b) Même argumentation qu'à la question précédente.

(c) Y suit la même loi que X , donc $\mathbb{P}([Y = 2]) = \mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{12}$ (par 1c)).

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}([X = 1]) \mathbb{P}([Y = 2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$$

D'autre part, $\mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 1]) = \mathbb{P}([Y = 2]) = \frac{1}{12}$ par la question précédente.

On a donc $\mathbb{P}([X = 1]) \mathbb{P}([Y = 2]) \neq \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 1])$.

Ceci prouve que X et Y ne sont pas indépendantes.

6. (a) X et Y sont à valeurs entières, et $Z = X + Y$ donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

De plus, X et Y étant positives :

$$[Z = 0] = [X = 0] \cap [Y = 0].$$

Cet événement est impossible, car le premier lancé de la pièce choisie tombe forcément sur Pile ou sur Face.

Donc Z ne prends pas la valeur 0.

De plus,

$$[Z = 2] = ([X = 0] \cap [Y = 2]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 0]).$$

Si on ne fait jamais Pile, alors $[X = 1]$ est réalisé et si on ne fait jamais face, alors $[Y = 1]$ est réalisé. Donc les événements $[X = 0] \cap [Y = 2]$ et $[X = 2] \cap [Y = 0]$ sont impossibles.

Enfin, $[X = 1] \cap [Y = 1]$ est aussi impossible car le premier lancer ne peut donner à la fois Pile et Face.

Finalement, $[Z = 2]$ est impossible comme réunion d'événements impossibles, donc Z ne prends pas la valeur 2.

Enfin, $[Z = 1]$ est possible (par exemple si la pièce 1 est choisie) et si $k \geq 2$, alors $[Z = k]$ est possible (en choisissant la pièce 0 et en obtenant le premier Pile au $k - 1$ ième lancer, par exemple).

Finalement, Z prends toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

- (b) On a $[Z = 1] = ([X = 0] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 0])$.

Les événements de cette réunion sont incompatibles, et $\mathbb{P}([X = 0]) = \mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{1}{3} \neq 0$ donc :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) = \mathbb{P}([X = 0])\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) + \mathbb{P}([Y = 0])\mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]).$$

Enfin, $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) = \mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]) = 1$ car par exemple, si la Pièce choisie ne fait jamais Pile, alors elle fait Face au premier lancer.

Donc :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- (c) Soit $n \geq 3$.

(P_1, \bar{P}_1) est un système complet d'événements donc :

$$[Z = n] = (P_1 \cap [Z = n]) \cup (\bar{P}_1 \cap [Z = n]).$$

Or, $P_1 = [X = 1]$ et $\bar{P}_1 = [Y = 1]$. Il vient :

$$[Z = n] = ([X = 1] \cap [X + Y = n]) \cup ([Y = 1] \cap [X + Y = n]) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1]).$$

Ceci démontre l'égalité voulue, pour tout $n \geq 3$.

- (d) Soit $n \geq 3$. La réunion donnée dans la question précédente est incompatible (car $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ le sont) donc :

$$\mathbb{P}([Z = n]) = \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = n - 1]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = n - 1]).$$

D'après les question 5a) et 5b) ($n \geq 3$ donc $n - 1 \geq 2$) :

$$\mathbb{P}([Z = n]) = \mathbb{P}([Y = n - 1]) + \mathbb{P}([X = n - 1]).$$

Mais Y et X suivent la même loi, donc par 1c) :

$$\mathbb{P}([Z = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Finalement, $\forall n \geq 3, \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{2}{3} \frac{1}{2^{n-1}}.$

Exercice 2

1. (a) $[X = 0]$ est la probabilité de commencer par deux lancers Pile, donc par indépendance des lancers :

$\mathbb{P}([X = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$ $[X = 1]$ est l'événement "avoir obtenu exactement une fois pile pendant les deux premiers lancers et avoir obtenu pile au troisième". D'après la loi binomiale, la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois pile en deux lancers est $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$ La probabilité d'obtenir pile au 3e lancer est $\frac{2}{3}.$ Donc par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

Enfin, $[X = 2]$ est la probabilité de faire exactement une fois pile pendant les 3 premiers lancers (ce qui arrive avec probabilité $\binom{3}{1} \frac{2}{3} \frac{1}{3^2}$ d'après la loi binomiale) et de faire pile au 4e lancer (ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{3}$).

Par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X = 2]) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

- (b) La probabilité de faire exactement une fois pile en n lancers est, d'après la loi binomiale, $\binom{n}{1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = n \frac{2}{3^n}.$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}.$ $[X = n]$ est l'événement : "faire exactement une fois Pile lors des $n + 1$ premiers lancers, et faire face au $n + 2$ -ième lancer". Notons B l'événement "faire exactement une fois Pile lors des $n + 1$ premiers lancers" et F l'événement "faire Face au $n + 2$ ième lancer". D'après la question précédente, $\mathbb{P}(B) = (n + 1) \frac{2}{3^{n+1}}.$ Par indépendance mutuelle des lancers, B et F sont indépendants. Ainsi :

$$\mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}(B \cap F) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(F) = (n + 1) \frac{2}{3^{n+1}} \frac{2}{3} = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}.$$

On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}.$

2. (a) X est à valeurs dans $\mathbb{N}.$ Soit $n \in \mathbb{N}.$ Une fois $[X = n]$ réalisé, la boule numérotée n est tirée avec probabilité non nulle. Donc U peut prendre la valeur $n : \mathbb{N} \subset U(\Omega).$ L'autre inclusion est claire : U est à valeurs entières positives.

Finalement, $U(\Omega) = \mathbb{N}.$

- (b) Soient k et n deux entiers naturels. $\mathbb{P}_{[X=n]}(U = k)$ est la probabilité de tirer une boule numérotée k dans une urne contenant $n + 1$ boules numérotées de 0 à $n.$ C'est impossible si $k > n,$ et sinon vu la situation d'équiprobabilité, cela arrive avec probabilité $\frac{1}{n + 1}.$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{1}{n + 1} & \text{sinon} \end{cases}.$

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Les événements $[X = n]$ sont tous de probabilité non nulle, pour $n \in \mathbb{N}$. De plus, $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements car $X(\Omega) = \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec conditionnement, on a l'égalité bien définie :

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k)$$

Or, $\forall n \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\mathbb{P}_{[X=n]}(U = k) = 0$. Il vient donc :

$$\mathbb{P}(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k)$$

Enfin, $\forall n \geq k$, $\mathbb{P}_{[X=n]}(U = k) = \frac{1}{n+1}$. On a bien montré :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}([X = n])}$$

D'après la question 1c), on a donc pour tout entier k :

$$\mathbb{P}(U_k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

(la série étant géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$) d'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}}$.

- (d) U admet une espérance ssi la série de terme général $k\mathbb{P}(U = k)$ converge absolument, donc si et seulement si elle converge (c'est une série à termes positifs). Or,

$$\forall k \in \mathbb{N}, k\mathbb{P}(U = k) = \frac{2}{9} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

et $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ converge comme série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$.

Par linéarité, $\sum_{k \geq 0} k\mathbb{P}(U = k)$ converge : U admet une espérance, et (le premier terme étant nul) :

$$E(U) = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{1}{2}.$$

On a donc $\boxed{E(U) = \frac{1}{2}}$.

Montrons maintenant que $U(U-1)$ admet une espérance. $U(U-1)$ admet une espérance ssi $\sum_{n \geq 0} k(k-1)\mathbb{P}(U = k)$ converge absolument, par transfert, donc ssi cette série converge (car c'est une série à termes positifs).

Les deux premiers termes de cette série sont nuls, donc on peut étudier à la place $\sum_{k \geq 2} k(k-1)\mathbb{P}(U = k)$. Or,

$$\forall k \geq 2, k(k-1)\mathbb{P}(U = k) = \frac{2}{3^3} \times k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$$

et la série $\sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ converge comme série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $1/3 \in]-1, 1[$. Par linéarité, $\sum_{k \geq 2} k(k-1)\mathbb{P}(U = k)$ converge, et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(U = k) = \frac{2}{3^3} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} = \frac{2}{3^3} \frac{2}{(2/3)^3} = \frac{1}{2}$$

Finalement, $U(U-1)$ admet une espérance et $E(U(U-1)) = \frac{1}{2}$. U admettant également une espérance, l'égalité

$$U^2 = U(U-1) + U$$

et la linéarité de l'espérance permettent de conclure que U^2 admet une espérance, et que

$$E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

D'après Koenig-Huygens, U et U^2 admettent une espérance donc U admet une variance, et

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

3. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors, $X(\omega) \geq U(\omega)$ d'après la protocole, car les boules de l'urne du tirage de l'issue ω sont numérotées de 0 à $X(\omega)$. Ainsi, $V(\omega) \geq 0$. V est clairement à valeurs dans \mathbb{Z} , donc on a finalement : $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}$, il est possible que X prenne la valeur n , puis que la boule numérotée 0 soit tirée. Dans ce cas, V prends la valeur n . donc $\mathbb{N} \subset V(\Omega)$.

$$\text{Finalement, } V(\Omega) = \mathbb{N}.$$

- (b) Soient k et n des entiers naturels. On a : $\mathbb{P}_{[X=n]}([V=k]) = \mathbb{P}_{[X=n]}(X-U=k) = \mathbb{P}_{[X=n]}(U=X-k) = \mathbb{P}_{[X=n]}(U=n-k)$. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X=n]}(V=k)$ est la probabilité de tirer la boule numérotée $n-k$ dans une urne dont les boules sont numérotées de 0 à n . Le tirage étant en situation d'équiprobabilité, cette probabilité vaut $\frac{1}{n+1}$ si $0 \leq n-k \leq n$, et 0 sinon.

$$\text{Or, } 0 \leq n-k \leq n \iff 0 \leq k \leq n.$$

Finalement :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{[X=n]}([V=k]) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (c) Soit $k \in V(\Omega) = \mathbb{N}$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $([X=n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, de probabilités toutes non nulles d'après la question 1.c). Ainsi, d'après la formule des probabilités totales avec conditionnement, on a l'égalité bien définie :

$$\mathbb{P}([V=k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \mathbb{P}_{[X=n]}([V=k]).$$

Or, $\forall n < k, \mathbb{P}_{[X=n]}([V=k]) = 0$ d'après la question précédente. Il vient donc :

$$\mathbb{P}([V=k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \mathbb{P}_{[X=n]}([V=k]).$$

D'après les questions 1c) et 3b), on a donc :

$$\mathbb{P}([V=k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \frac{1}{n+1} = \mathbb{P}([U=k])$$

(on reconnaît l'expression trouvée à la question 2c).

Ainsi, U et V ont la même loi :

$$V(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([V=k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

4. Puisque $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$, U et V sont indépendantes si et seulement si pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, $[U=k]$ et $[V=j]$ sont indépendants.

Or, pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbb{P}([U=k] \cap [V=j]) = \mathbb{P}([U=k] \cap [X-U=j]) = \mathbb{P}([U=k] \cap [X=j+k])$$

car $\forall \omega \in \Omega : U(\omega) = k$ et $X(\omega) - U(\omega) = j \iff U(\omega) = k$ et $X(\omega) = j + k$. De plus, $\mathbb{P}([X = j + k]) \neq 0$ car $j + k \in \mathbb{N}$ donc en poursuivant le calcul à l'aide des questions précédentes :

$$\mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) = \mathbb{P}([X = j + k])\mathbb{P}_{[X=j+k]}(U = k) = (j + k + 1) \frac{4}{3^{j+k+2}} \times \frac{1}{j + k + 1} = \frac{4}{3^{j+k+2}}$$

Enfin d'après les questions précédentes,

$$\mathbb{P}([U = k])\mathbb{P}([V = j]) = \frac{2}{3^{k+1}} \frac{2}{3^{j+1}} = \frac{4}{3^{j+k+2}}.$$

On a donc bien :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([U = k] \cap [V = j]) = \mathbb{P}([U = k])\mathbb{P}([V = j]).$$

Les variables aléatoires U et V sont bien indépendantes.

5. (a)

```

1 import numpy.random as rd
2 def simuleX():
3     cp=0 #compteur des piles
4     cf=0 #compteur des faces
5     while cp<2: #tant qu'on a pas eu 2 piles :
6         if rd.random()<2/3: #on lance une pièce, si elle fait pile :
7             cp+=1 #on compte un pile
8         else: #sinon, on compte un face
9             cf+=1
10    return(cf) #renvoie le nombre de faces effectuées

```

(b) A l'aide d'une boucle "for", `mystere(p)` effectue $N = 10000$ tirages des variables X et Y , pour $p = p$ et rajoute $1/N$ quand $X \leq Y$. Autrement dit, ce code simule 10000 parties du jeu, et renvoie le nombre de fois que le joueur A a gagné, divisé par 10000.

La fonction `mystere` effectue donc 10000 simulations du jeu pour la valeur de p donnée en argument,

et renvoie une estimation de la probabilité que A gagne.

(c)

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 listeX=np.linspace(0,1,500)
4 listeY=[mystere(p) for p in listeX]
5 plt.plot(listeX,listeY)
6 plt.show()

```

(d) Le jeu est équilibré si la probabilité que A gagne est de 0.5. Par lecture graphique, on voit que :

Le jeu semble équilibré pour $p \simeq 0.8$.

6. (a) On reconnaît que Z suit une loi géométrique de paramètre p , donc :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*, \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Z = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

D'après la cours, Z admet une espérance et une variance donnée par $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

(b) On a clairement $Y + 1 = Z$. Donc $Y = Z - 1$. Par théorème,

$$Y \text{ admet une espérance, et } E(Y) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$

D'autre part, Z admet une variance, donc par théorème, $Y = Z - 1$ aussi, et

$$V(Y) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(c) Pour tout entier n , $P([Y \geq n]) = \mathbb{P}(Z \geq n + 1) = (1 - p)^n$ car on reconnaît la fonction de survie d'une variable suivant une loi géométrique de paramètre p .

7. (a) On applique la formule des probabilités totales au SCE $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on remarque que par indépendance de X et Y (les expériences donnant X ou Y le sont),

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(X \leq Y) = \mathbb{P}_{[X=n]}(n \leq Y) = \mathbb{P}(n \leq Y).$$

- (b) D'après la question précédente et les résultats des questions 6c) et 1c) :

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \cdot (1-p)^n = \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1-p}{3}\right)^n = \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre 1, de raison $\frac{1-p}{3} \in]-1, 1[$ (car $0 \leq p \leq 1$ donne $0 \leq \frac{1-p}{3} \leq \frac{1}{3}$). Par théorème, on a donc :

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{4}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} = \frac{4}{9} \frac{9}{(2+p)^2} = \frac{4}{(2+p)^2}.$$

On a donc bien : $\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$.

8. Le jeu est équilibré si et seulement si $\mathbb{P}(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ (car $[X \leq Y]$ est l'événement "le joueur A gagne", et ce jeu est sans match nul).

Or, $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \iff (2+p)^2 = 8 \iff 2+p = \sqrt{8}$ car $2+p > 0$.

Finalement, Le jeu est équilibré pour $p = 2\sqrt{2} - 2$.

Exercice 3

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur l'intervalle $I_n = [n, +\infty[$ donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $f_n : x \mapsto \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$ est une primitive de g et est de classe C^1 , sur I_n . Ainsi : $\forall x \in I_n, f'_n(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur I_n .

- (b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, $\sqrt{t} \geq 0$ donc $e^{\sqrt{t}} \geq 1$ par croissance de l'exponentielle. Par intégration des relations de comparaisons, pour tout $x \geq n$, on a :

$$f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt \geq \int_n^x 1 dt = x - n.$$

Or, $x - n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Par théorème de comparaison, on a donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

- (c) La fonction f_n est strictement croissante sur $I_n = [n, +\infty[$. De plus, elle est C^1 donc continue sur I_n . D'après le théorème de la bijection monotone, f_n induit une bijection de I_n vers $[f_n(n), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$ (d'après la question précédente).

On a bien $1 \in [0, +\infty[$ donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet bien une unique solution, notée u_n , sur $[n, +\infty[$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $u_n \in [n, +\infty[$, donc $u_n \geq n$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ donc par comparaison,

$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq n$ un réel. Alors, par croissance de $g : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ (comme composée des fonctions croissantes $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto e^t$) :

$$\forall t \in [n, x], g(n) \leq g(t) \leq g(x)$$

donc par croissance de l'intégrale ($n \leq x$):

$$\int_n^x g(n)dt \leq \int_n^x g(t)dt \leq \int_n^x g(x)dx$$

Autrement dit,

$$(x - n)g(n) \leq f_n(x) \leq (x - n)g(x).$$

Appliquée en $x = u_n$, il vient :

$$(u_n - n)e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) = 1 \leq (u_n - n)e^{\sqrt{u_n}}.$$

On déduit séparément chacune des inégalités suivantes (par positivité de l'exponentielle):

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \text{ et } u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}}$.

3. (a) A l'aide du module numpy (la question aurait du mentionner la possibilité d'importer un module):

```

1 import numpy as np
2 n=0
3 while np.exp(-np.sqrt(n)) > 10**(-4):
4     n+=1
5     print(n)

```

- (b) Ce script affiche le premier entier n tel que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$. Or, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} &\iff -\sqrt{n} \leq -4 \ln(10) \\ &\iff \sqrt{n} \geq 4 \ln(10) \\ &\iff n \geq 16 \ln^2(10) \end{aligned}$$

Or, $\ln(10)^2 \simeq (2 + 0,3)^2 = 4 + 1,2 + 0,09 = 5,29$ donc $16 \ln^2(10) \simeq 16 \times 5,29 \simeq 85$.

$\boxed{\text{Le script renvoie 85.}}$

4. (a) Par définition de u_n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Donc avec la question 2b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

Or, $e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc :

$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, } v_n = u_n - n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.}$

- (b) La fonction $t \mapsto \sqrt{1+x}$ est concave sur $[-1, +\infty[$ comme composée des fonctions concaves et croissantes $t \mapsto 1+t$ et $t \mapsto \sqrt{t}$. Sa tangente en 0 admet pour équation :

$$y = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+0}}(x-0)$$

Par théorème, une fonction concave est en dessous de ses tangentes. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.}$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sqrt{u_n} &= \sqrt{n + v_n} = \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \\ &\leq \sqrt{n} \left(1 + \frac{v_n}{2n}\right) \quad (\text{d'après la question précédente, car } \frac{v_n}{n} \geq 0 \geq -1) \\ &\leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ainsi, en multipliant par -1 puis par croissance de l'exponentielle :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{v_n}}\right)}$$

(d) D'après la question précédente et la 2b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{v_n}}\right) \leq e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{v_n}}\right) \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$$

Or $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ d'après 4a), donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{v_n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1.$