Lycée Hoche
ECG1 A

TD de mathématiques n°4 : Généralités sur les suites réelles

2023-2024
Mathématiques

Pour commencer

Généralités sur les suites

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{2n}{n+1}$ et $v_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n - \frac{1}{n}$ et $v_n = n + \frac{1}{n}$.

Étudier les sens de variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $u_n = \frac{2n}{n+1}$

(b) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

(c) $u_n = \frac{2^n}{n+1}$

(d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(e) $u_n = 2n + (-1)^n$

(f) $u_n = e^{n+1} - e^n$

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$, on pose $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.

Exercice 6 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un terme initial $u_0 \geq 1$ et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 2$.

(b) En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+(u_n)^2}{2}$. Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq n$ et en déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{u_n}{2}}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $1 \leq u_n \leq 2$.

(b) En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{2}$.

(d) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in \mathcal{D}_f$. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 13 Soient $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a, u_1 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

Suites remarquables

Exercice 14 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$

(b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$

(c) $u_2 = \dfrac{7}{4}$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{4}$

(d) $u_5 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$

Exercice 15

(a) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique, géométrique, ou bien ni l'un ni l'autre?

(b) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique, géométrique, ou bien ni l'un ni l'autre?

Exercice 16 Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ lorsque :

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$

(b) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$

(c) $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

(d) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -2u_n$

Exercice 17 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 3^n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n + 1$.

(a) Montrer qu'il existe une unique suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + n + 1$.

(b) En déduire explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 2v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = -u_n + 2v_n$ et $\beta_n = 2u_n + v_n$.

(a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(b) En déduire explicitement u_n et v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 1$.

(b) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant v_n en fonction de n.

(e) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Exercice 21 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

(b) $u_2 = 2$ et $u_{n+1} = -2u_n + 3$

(c) $u_1 = -\dfrac{1}{5}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + \dfrac{1}{5}$

(d) $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{3}$

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique

(b) En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = a\,(1 - u_n)$. Déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

(b) $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{9}{2}$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - \dfrac{9}{4}u_n$

(c) $u_3 = \dfrac{11}{8}$ et $u_4 = \dfrac{7}{8}$ et $4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$

(d) $u_0 = 0$ et $u_1 = 2\sqrt{3}$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$

Exercice 25 On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) En déduire une expression explicite de u_n, puis v_n, en fonction de n.

Pour continuer

Généralités sur les suites

Exercice 26 On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 27 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.

(b) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geq -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{1+(u_n)^2}} - 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 29 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{n}{2^n}$.

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle monotone?

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle majorée?

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle minorée?

Exercice 30 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer en raisonnant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n = \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{u_0}}$.

Exercice 31 On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait les relations $u_{n+1} = (u_n)^2 + 3u_n + 1$ et $v_{n+1} = (v_n)^2 - v_n + 1$.

Déterminer le sens de variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 32 On considère la suite réelle définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 1$.

Exercice 33 *(+)* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$.

(b) Déterminer les racines du polynôme $P_n(X) = X^2 - X - n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer en raisonnant par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On pourra s'aider d'une comparaison de u_n aux racines de P_n, à démontrer.

Exercice 34 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+(u_n)^2}{2}}$.

(a) Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, 1]$.

  (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$.

  (ii) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [1, +\infty[$.

  (i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [1, +\infty[$.

  (ii) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites remarquables

Exercice 35 Dans chacun des cas suivants, déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout entier n convenable :

(a) $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

(b) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -2u_n$

(c) $u_5 = 12$ et $u_{n+1} = u_n + 1$

(d) $u_3 = -1$ et $u_{n+1} = -\dfrac{3u_n}{4}$

(e) $u_0 = 2$ et $3u_{n+1} = 2u_n - 1$

(f) $u_2 = 1$ et $5u_{n+1} = -u_n + 3$

(g) $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$

(h) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -4u_n + 5$

(i) $u_1 = 6$ et $u_2 = -6$ et $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$

(j) $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$

(k) $u_0 = 5$ et $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$

(l) $u_0 = 6$ et $u_1 = 5$ et $6u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$

Exercice 36 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{2u_n+4}$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $\dfrac{3x+1}{2x+4} = a + \dfrac{b}{2x+4}$.

(b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $-1 < u_n < \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
- (ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant v_n en fonction de n.
- (iii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Exercice 37 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{3 - 2u_n}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = nu_n$.

(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

(b) En déduire une formule explicite pour v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 38 Soit $p \in]0,1[$. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0, u_1 = p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + (1-p)u_n$$

Déterminer explicitement u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.