

Correction du Concours Blanc n°1

Exercice 1 *D'après Ecricome 2023*

1. Les boules sont numérotées de 1 à n donc $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
 Le tirage dans la première urne représente une situation d'équiprobabilité. De plus, chaque numéro n'apparaît qu'une fois. Ainsi, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$

2. Par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

et

$$\sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Les boules de la deuxième urne peuvent être numérotées de 1 à n en fonction du numéro de la première boule. Ainsi, $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
4. (a) On suppose que la première boule tirée porte le numéro k . Ainsi, la deuxième urne contient j boules numérotées j pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Le nombre de boules dans la seconde urne est donc

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$$

(b) Soit $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Cas 1 : $j \leq k$. Si la première boule porte le numéro k alors la seconde urne contient j boules numérotées j (car $j \leq k$) pour un total de $\frac{k(k+1)}{2}$ boules (question précédente). De plus, le tirage dans cette urne représente une situation d'équiprobabilité donc

$$\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = j) = \frac{j}{k(k+1)/2} = \frac{2j}{k(k+1)}$$

Cas 2 : $j \geq k + 1$. Si la première boule porte le numéro k alors la seconde urne ne contient pas de boule numérotée j (car $j > k$) donc

$$\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = j) = 0$$

On en déduit :

$$\forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = j) = \begin{cases} \frac{2j}{k(k+1)} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. (a) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{ak+a}{k(k+1)} + \frac{bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$$

Donc par identification,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \iff \begin{cases} a+b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

- (b) La boule tirée dans la première urne porte un numéro unique compris entre 1 et n , ce qui justifie que les événements $((X = k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont deux à deux incompatibles et que

$$\bigcup_{k=1}^n (X = k) = \Omega$$

Ainsi, les événements $((X = k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ forment un système complet d'événements.

- (c) Fixons $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

D'après la formule des probabilités totales avec conditionnement (licite car avec la question 1, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \neq 0$), on a :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = j)$$

En utilisant la question 4.b et la linéarité de la somme, on a

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Puis avec la question 5.a et en remarquant une somme télescopique,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2j}{n} \frac{n+1-j}{j(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

Ainsi,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

6. Par linéarité de la somme et en utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{j=1}^n j \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j(n+1-j) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^n j \times (n+1) - \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n+1 - \frac{2n+1}{3} \\ \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(Y = j) &= \frac{n+2}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2 D'après EDHEC 2024

1. On a, par linéarité de l'intégrale

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} [\ln(4-x^2)]_0^1 = -\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(4)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

2. (a) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq x^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$0 \geq -x^2 \geq -1$$

$$4 \geq 4 - x^2 \geq 3$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4 - x^2} \leq \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4 - x^2} \leq \frac{x^n}{3} \quad (3)$$

(1) par croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}_+

(2) par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^*

(3) car $x^n \geq 0$ puisque $x \geq 0$

On en déduit par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx$$

d'où par linéarité de linéarité :

$$\frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx$$

Or,

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

(b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$. D'après l'encadrement de la question précédente et le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

(c) • On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$.

• Les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(n+1)}$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ sont à termes positifs.

• La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge donc par changement d'indice et par linéarité, la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(n+1)}$ diverge.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

3. (a) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{4-x^2}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

Ainsi, avec une intégration par parties :

$$u_n = \int_0^1 x^n \times \frac{1}{4-x^2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{4-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \left(-\frac{-2x}{(4-x^2)^2} \right) dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$u_n = \left(\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{3} - 0 \right) - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq x^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$0 \geq -x^2 \geq -1$$

$$4 \geq 4 - x^2 \geq 3$$

$$16 \geq (4 - x^2)^2 \geq 9 \quad (1)$$

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(4 - x^2)^2} \leq \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{x^{n+2}}{16} \leq \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} \leq \frac{x^{n+2}}{9} \quad (3)$$

(1) par croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}_+

(2) par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^*

(3) car $x^{n+2} \geq 0$ puisque $x \geq 0$

On en déduit par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx$$

d'où par linéarité de linéarité :

$$\frac{1}{16} \int_0^1 x^{n+2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9} \int_0^1 x^{n+2} dx$$

Or,

$$\int_0^1 x^{n+2} dx = \left[\frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{n+3}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{16(n+3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{9(n+3)} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx = 0$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question 3.a,

$$3nu_n = \frac{n}{n+1} - \frac{6n}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 6 \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \times \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx$$

Or, par la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4 - x^2)^2} dx = 0$.

De plus, par opération sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

Ainsi, par produit et somme :

$$3nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - 6 \times 1 \times 0 = 1$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$

Exercice 3 *Ecricome 2023*

1. (a) La fonction racine carrée est strictement positive et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} .

Ainsi, par quotient, f est bien définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x/2}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2x}e^{x/2} = \frac{x-1}{2x} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{x/2}$$

Il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x)$$

- (b) La fonction f est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* en tant que quotient de fonctions qui le sont aussi. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$

avec égalité si, et seulement si $x = 1$.

Avant de dresser le tableau de variations, étudions les limites de f au bord du domaine de définition.

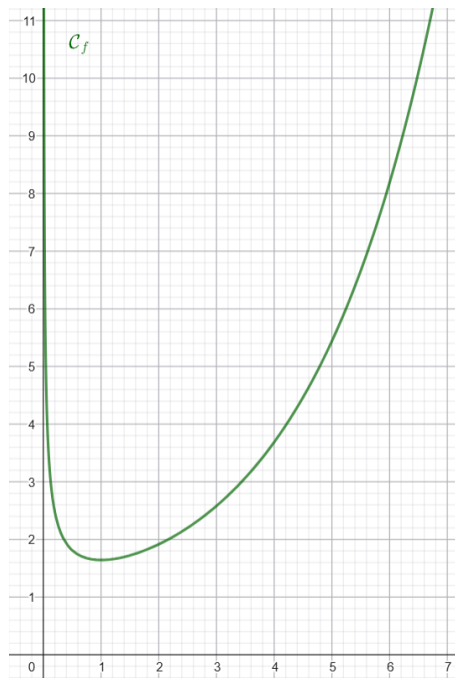
En 0 : Par continuité des fonctions exponentielle et racine carrée sur leur domaine de définition, $e^{x/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$ et $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0^+$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

En $+\infty$: Par le théorème des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$e^{1/2}$	$+\infty$

- (c)



- (d) La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* car elle est y dérivable (question 1.a).
En appliquant le théorème de la bijection monotone sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ où f est strictement monotone, on en déduit que f induit une bijection

- de $]0, 1[$ sur $[f(1), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)[= [e^{1/2}, +\infty[$
- de $]1, +\infty[$ sur $]f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]e^{1/2}, +\infty[$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

D'après l'énoncé, $2 < e < 3 < 4$ donc par stricte croissance de la racine carrée sur \mathbb{R}_+ , $\sqrt{e} < \sqrt{4}$, c'est-à-dire, $e^{1/2} < 2$.

Ainsi, $n \in]e^{1/2}, +\infty[$ donc d'après les bijections induites par f , il existe $u_n \in]0, 1[$ et $v_n \in]1, +\infty[$ tels que $f(u_n) = n$ et $f(v_n) = n$. Par conséquent :

l'équation $f(x) = n$ possède exactement deux solutions u_n et v_n avec $0 < u_n < 1 < v_n$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Alors, par définition de v_n ,

$$f(v_{n+1}) - f(v_n) = n + 1 - n = 1 \geq 0$$

Donc

$$f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$$

Or, d'après la question précédente, $v_n > 1$ et $v_{n+1} > 1$ donc par stricte croissance de f sur $]1, +\infty[$,

$$v_{n+1} \geq v_n$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

- (b) La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante donc d'après le théorème de convergence monotone, elle tend vers une limite finie ou elle tend vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde qu'elle converge, disons vers ℓ .

Avec la question 1.d, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $v_n > 1$ donc par préservation des inégalités larges par passage à la limite, on a $\ell \geq 1$.

Or, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc par continuité de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* ($\ell \in \mathbb{R}_+^*$), $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

C'est absurde car $f(v_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Alors, par définition de u_n ,

$$f(u_{n+1}) - f(u_n) = n + 1 - n = 1 \geq 0$$

Donc

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$

Or, d'après la question précédente, $0 < u_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$ donc par stricte croissance de f sur $]0, 1[$,

$$u_{n+1} \leq u_n$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

- (b) La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on a $u_n > 0$ donc par préservation des inégalités larges par passage à la limite, $\ell \geq 0$.

Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$ donc $\ell > 0$.

Or, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc par continuité de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* ($\ell \in \mathbb{R}_+^*$), $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

C'est absurde car $f(u_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Par conséquent, $\ell = 0$

- (d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$n = f(u_n) = \frac{e^{\frac{u_n}{2}}}{\sqrt{u_n}}$$

donc

$$n\sqrt{u_n} = e^{\frac{u_n}{2}}$$

puis

$$n^2 u_n = e^{u_n}$$

Or, par la question précédente, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par continuité de la fonction exponentielle,

$$e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1. \text{ Il vient } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1}$$

4. (a) La fonction f est décroissante sur $]0, 1[$!

```

1  import numpy as np
2  def approx_u(n, eps):
3      a = 0
4      b = 1
5      while b-a > eps:
6          c = (a+b)/2
7          if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
8              b = c
9          else:
10             a = c
11     return (a+b)/2

```

(b) Pour obtenir une approximation de la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ à ε près, il suffit d'avoir approximation des termes u_n à $\frac{\varepsilon}{N-2}$ près et donc, quitte à être plus précis, à $\frac{\varepsilon}{N}$ près.

```

1  import numpy as np
2  def sp(N, eps):
3      s = 0
4      for n in range(2, N+1):
5          s = s + approx_u(n, eps/N)
6      return s

```

Exercice 4 D'après Ecricome 2023

Partie 1

1. (a) Montrons que la famille \mathcal{B} est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \iff \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \\ \iff \quad \begin{cases} \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que la famille \mathcal{B} est libre.

De plus, cette famille est constituée de 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = 4$ donc \mathcal{B} est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(b) Par calcul direct,

$$Au_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3 + 2u_4$$

Les coordonnées de Au_4 dans la base \mathcal{B} sont donc $(0, 0, 1, 2)$.

(c) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\iff \begin{cases} -x_1 + & & & x_4 = y_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & & & = y_2 \\ & x_2 + x_3 & & = y_3 \\ x_1 + & & & x_4 = y_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x_1 + & & & x_4 = y_1 \\ & -x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 \\ & x_2 + x_3 & & = y_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 & & & 2x_4 = y_1 + y_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 & & & \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x_1 + & & & x_4 = y_1 \\ & -x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 \\ & & 2x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & & & 2x_4 = y_1 + y_4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce système est échelonné avec des coefficients diagonaux non nuls donc il est de Cramer. Ainsi, P est inversible. Terminons la résolution du système afin de déterminer P^{-1} .

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\iff \begin{cases} -x_1 + & & & x_4 = y_1 \\ & -x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 \\ & & 2x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4 & & & x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x_1 + & & & = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_4 \\ & -x_2 + x_3 + & & = \frac{1}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_4 \\ & & 2x_3 + & = \frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 & & & x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 & & & \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4 & & & \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x_1 + & & & = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_4 \\ & -x_2 + x_3 + & & = \frac{1}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_4 \\ & & x_3 + & = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{4}y_4 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 & & & x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}y_1 + & & & \frac{1}{2}y_4 \\ x_2 = -\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_4 \\ x_3 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{4}y_4 \\ L_1 \leftarrow -L_1 & & & \\ L_2 \leftarrow -L_2 + L_3 & & & x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En posant $B = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad AX = Y \iff X = BY$$

Ceci est vrai pour tout $Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc P est inversible et $P^{-1} = B = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

2. (a) Par calcul direct,

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$4A^2 - 4A = 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc $A^3 = 4A^2 - 4A$

(b) Montrons par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n) : " \text{ Il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = a_n A^2 + b_n A "$$

• **Initialisation** : On a $A^1 = A = 0 \cdot A^2 + 1 \cdot A$ donc les réels $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$ conviennent
Ce qui montre $H(1)$.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$.

D'après $H(n)$, on dispose de $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = a_n A^2 + b_n A$.

Alors, en utilisant la question précédente,

$$A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A^2 + b_n A) \times A = a_n A^3 + b_n A^2 = a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2 = (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on obtient $A^{n+1} = a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A$.

Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.

• **Conclusion** : On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe deux réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = a_n A^2 + b_n A.}$$

De plus, avec l'hérédité, on a aussi montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 4a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = -4a_n.}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors avec la question précédente,

$$\boxed{a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n}$$

(b) Avec la question précédente, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $X^2 - 4X + 4$.

Or, $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ donc ce polynôme admet une racine double : 2.

Par conséquent, on dispose de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = (\lambda + \mu n)2^n$$

Or, $A^1 = 0 \cdot A^2 + 1 \cdot A$ et $A^2 = 1 \cdot A^2 + 0 \cdot A$ donc $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 0 & = & 2\lambda & + & 2\mu \\ 1 & = & 4\lambda & + & 8\mu \end{cases} \quad \begin{matrix} \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 0 & = & 2\lambda & + & 2\mu \\ 1 & = & & & 4\mu \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} \lambda & = & -\frac{1}{4} \\ \mu & = & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}n\right)2^n = (n-1)2^{n-2}}$$

(c) Avec la question 2.b et la question précédente, on a $b_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} = -4a_n = -(n-1)2^n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$b_n = -(n-2)2^{n-1} = (2-n)2^{n-1}$$

Cette formule est aussi vraie pour $n = 1$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = (2-n)2^{n-1}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, avec la question 2.b, on a

$$A^n = a_n A^2 + b_n A = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n & 0 & 0 & 2a_n + b_n \\ 3a_n + b_n & 2a_n + b_n & 2a_n + b_n & a_n \\ 3a_n + b_n & 2a_n + b_n & 2a_n + b_n & a_n \\ 2a_n + b_n & 0 & 0 & 2a_n + b_n \end{pmatrix}$$

En utilisant les questions 3.b et 3.c, on a

$$\begin{aligned} 2a_n + b_n &= 2(n-1)2^{n-2} + (2-n)2^{n-1} = (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} = 2^{n-1} \\ 3a_n + b_n &= 3(n-1)2^{n-2} + (2-n)2^{n-1} = 3(n-1)2^{n-2} + 2(2-n)2^{n-2} = (n+1)2^{n-2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Partie 2

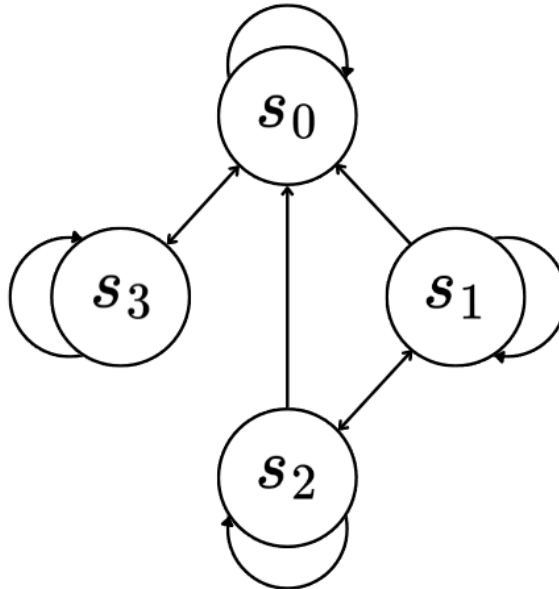
5. (a) On note \mathcal{A} l'ensemble des arêtes du graphe \mathcal{G} .

La matrice d'adjacence de \mathcal{G} est la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s_{i-1}, s_{j-1}) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M^n est le nombre de chemins de longueur n de \mathcal{G} de s_{i-1} vers s_{j-1} .

6. (a)



(b) La matrice d'adjacence du graphe \mathcal{G} est A . D'après la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient d'indice $(1, 2)$ de A^n est nul (aussi vrai pour $n = 0$).

Ainsi, il n'existe pas de chemin allant de s_0 à s_1 . Le graphe \mathcal{G} n'est pas connexe.

(c) D'après la question 5.b, ce nombre correspond au coefficient d'indice $(4, 1)$ de la matrice A^n . En utilisant la question 4, on obtient que

le nombre de chemins de longueur n allant du sommet s_3 au sommet s_0 est égal à 2^{n-1} .

7.

```

1  import numpy as np
2  def matrice_vers_liste(A) :
3      p = len(A)
4      L = []
5      for i in range(p) :
6          V = []
7          for j in range(p) :
8              if A[i][j] == 1 :
9                  V.append(j)
10             L.append(V)
11     return(L)

```

8. (a) En sortie d'algorithme, on obtient `distances = [1,0,1,2]`

(b)

```

1  def parcours(L, i0):
2      p = len(L)
3      distances = [p]*p
4      distances[i0] = 0
5      a_explorer = [i0]
6      marques = [i0]
7      while len(a_explorer) > 0 :
8          s = a_explorer[0]
9          del a_explorer[0]
10         for v in L[s] :
11             if v not in marques:
12                 marques.append(v)
13                 a_explorer.append(v)
14                 distances[v] = distances[s] + 1
15     return distances

```

(c) À la fin de l'algorithme, il faut renvoyer la liste des sommets qui ont une distance au sommet s strictement inférieure à p .

```

1  def parcours(L, i0):
2      p = len(L)
3      distances = [p]*p
4      distances[i0] = 0
5      a_explorer = [i0]
6      marques = [i0]
7      while len(a_explorer) > 0 :
8          s = a_explorer[0]
9          del a_explorer[0]
10         for v in L[s] :
11             if v not in marques:
12                 marques.append(v)
13                 a_explorer.append(v)
14                 distances[v] = distances[s] + 1
15     R = [i for i in range(p) if distances[i] != p]
16     return R

```