

Ce corrigé provient partiellement de celui de M. Zoric que je remercie chaleureusement.

## Correction du Concours Blanc n°2 (ESSEC 2017)

### I. Indice de Gini

1. (a) Soit  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  une fonction de la variable réelle à valeurs réelles, convexe sur  $J$ .

Alors, la courbe représentative de  $f$  est située en-dessous de toutes ses cordes sur  $J$ .

De manière plus explicite : la courbe de représentative de  $f$  est, sur  $[t_1, t_2]$ , en dessous du segment dont les extrémités ont pour coordonnées  $(t_1, f(t_1))$  et  $(t_2, f(t_2))$ , et ce pour tout  $(t_1, t_2) \in I^2$  vérifiant  $t_1 \leq t_2$ .

- (b) Soit  $f$  une fonction de la variable réelle à valeurs réelles, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $f$  est convexe sur  $[0, 1]$ ;
- ii.  $f'$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

2. (a) Soit  $f \in E$ . Montrons que  $\tilde{f}$  est concave sur  $[0, 1]$ .

Pour ce faire, montrons que  $-\tilde{f}$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Soit  $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ . Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors,

$$\begin{aligned} (-\tilde{f})(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= -(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 - f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)) \\ &= f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \end{aligned}$$

Or,  $f$  étant un élément de  $E$ ,  $f$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Ainsi,  $f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2)$ .

Donc,  $(-\tilde{f})(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2) - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)$ .

Or,

$$\begin{aligned} \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2) - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= \lambda(f(t_1) - t_1) + (1 - \lambda)(f(t_2) - t_2) \\ &= -(\lambda(t_1 - f(t_1)) + (1 - \lambda)(t_2 - f(t_2))) \\ &= -(\lambda\tilde{f}(t_1) + (1 - \lambda)\tilde{f}(t_2)) \end{aligned}$$

$$\lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2) - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) = \lambda(-\tilde{f})(t_1) + (1 - \lambda)(-\tilde{f})(t_2)$$

Ainsi,

$$(-\tilde{f})(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda(-\tilde{f})(t_1) + (1 - \lambda)(-\tilde{f})(t_2)$$

Ceci étant vrai pour tous  $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on en déduit que  $-\tilde{f}$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Donc,  $\tilde{f}$  est concave sur  $[0, 1]$ , et ce pour tout  $f \in E$ .

- (b) Soit  $f \in E$ . Alors :

$$\begin{aligned} I(f) &= 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt \\ &= 2 \left( \int_0^1 t dt - \int_0^1 f(t) dt \right) \\ &= 2 \left( \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 f(t) dt \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \int_0^1 f(t) dt \right) \\ I(f) &= 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt \end{aligned} \tag{1}$$

(1) : par linéarité de l'intégration sur un segment,  $f$  et  $t \mapsto t$  étant continues sur  $[0, 1]$ .

Ainsi, pour tout  $f \in E$ ,  $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt$

- (c) Représentation graphique d'un élément  $f$  de  $E$  (en bleu) et de la fonction  $t \mapsto t$  sur  $[0, 1]$  (en noir).

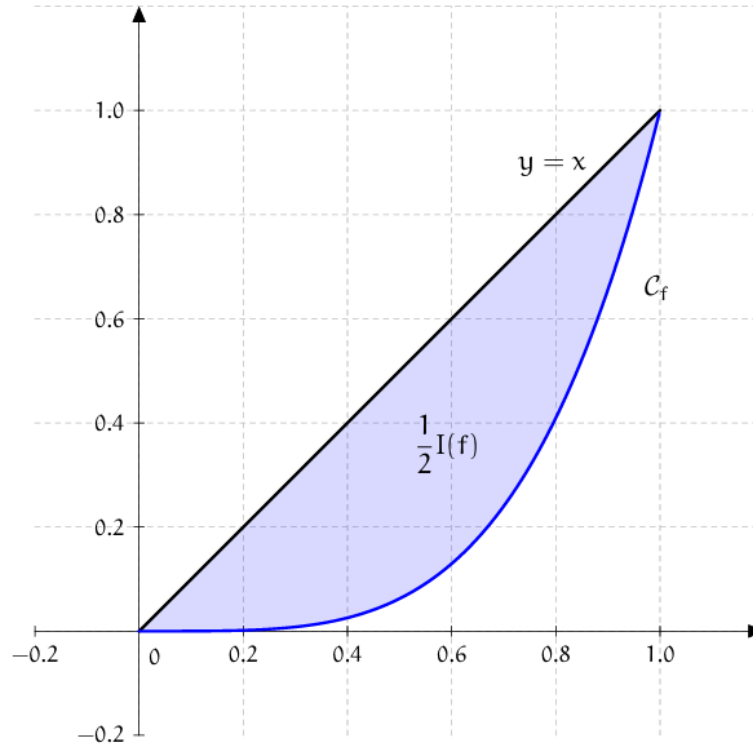
Soit  $f \in E$ .

Remarquons d'emblée que,  $f$  étant convexe sur  $[0, 1]$ , par définition (cf 1.a),  $\mathcal{C}_f$  est située en dessous de sa corde reliant les points de coordonnées  $(0, f(0))$  et  $(1, f(1))$ .

Or,  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Donc, la corde relative à  $f$  reliant les points de coordonnées  $(0, f(0))$  et  $(1, f(1))$  correspond à la représentation graphique sur  $[0, 1]$  de la fonction  $t \mapsto t$ .

Ainsi, sur  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de  $t \mapsto t$ .



Proposons trois interprétations graphiques de  $I(f)$ .

- Par définition,  $I(f) = 2 \int_0^1 (t - f(t))dt$ . Ainsi,  $I(f)$  est égal au double de l'aire (en unité d'aire) délimitée par les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ , la première bissectrice du plan (ie la droite d'équation  $y = t$ ) et la courbe représentative de  $f$ . Sur la représentation graphique précédente, la surface colorée a donc une aire égale à  $\frac{1}{2}I(f)$  unité d'aire.
- D'après 2.b,  $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t)dt$ . Ainsi,  $I(f)$  est égal à 1 moins le double de l'aire délimitée par les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ , la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses.
- On a :  $\frac{1}{2} = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 tdt$ . Or, par définition,  $I(f) = 2 \int_0^1 (t - f(t))dt$ . Donc,

$$I(f) = \frac{\int_0^1 (t - f(t))dt}{\int_0^1 tdt}$$

$I(f)$  est égale à la proportion de l'aire  $\mathcal{A}_1$  délimitée par les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ , la première bissectrice du plan (ie la droite d'équation  $y = t$ ) et la courbe représentative de  $f$  dans l'aire  $\mathcal{A}_2$  délimitée par les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ , la première bissectrice du plan et l'axe des abscisses.

3. (a)
- $f$  est définie sur  $[0, 1]$ .
  - Par croissance de la fonction carrée sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\forall t \in [0, 1], 0^2 \leq t^2 \leq 1^2$   
Donc, pour tout  $t \in [0, 1], 0 \leq f(t) \leq 1$ . On en déduit que  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .

- De plus,  $f(0) = 0^2 = 0$  et  $f(1) = 1^2 = 1$ .
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  en tant que fonction polynomiale et  $\forall t \in [0, 1], f'(t) = 2t$ .  
Ainsi,  $f'$  est croissante sur  $[0, 1]$  car coïncide sur  $[0, 1]$  avec une fonction affine de coefficient directeur positif ( $2 \geq 0$ ). Alors, d'après la question 1.b,  $f$  est convexe sur  $[0, 1]$ .
- $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ ,  $f$  est en particulier continue sur  $[0, 1]$ .

Finalement,  $f$  est bien un élément de  $E$ .

(b) D'après 2.b,  $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt$ .

$$\text{Or, } \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ainsi, } I(f) = 1 - 2 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{D'où } I(f) = \frac{1}{3}$$

4. (a) Soit  $f \in E$ . Montrons que  $\forall t \in [0, 1], f(t) \leq t$ .

Comme  $f \in E$ ,  $f$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Ainsi,  $\forall \lambda \in [0, 1], \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2)$ .

En particulier, pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $(t_1, t_2) = (1, 0), f(t \times 1 + (1 - t) \times 0) \leq t f(1) + (1 - t)f(0)$ .

Donc, pour tout  $t \in [0, 1], f(t) \leq t f(1) + (1 - t)f(0)$ .

Or, comme  $f \in E, f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Donc, pour tout  $t \in [0, 1], f(t) \leq t$ .

Ainsi, pour tout  $t \in [0, 1], t - f(t) \geq 0$ .

Donc, par propriété de positivité de l'intégration ( $t \mapsto t - f(t)$  étant continue sur  $[0, 1]$  en tant que combinaison linéaire de telles fonctions et les bornes étant rangées dans le sens croissant ( $0 \leq 1$ )) :

$$\int_0^1 (t - f(t)) dt \geq 0$$

Or,  $2 \geq 0$  donc  $2 \int_0^1 (t - f(t)) dt \geq 0$ . Or, par définition,  $I(f) = 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt$  donc,  $I(f) \geq 0$ .

Ainsi, pour tout  $f \in E, I(f) \geq 0$

- (b) Soit  $f \in E$ . Alors, nous avons successivement :

$$I(f) = 0 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (t - f(t)) dt = 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], t - f(t) = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], f(t) = t$$

(1) : car  $2 \neq 0$

(2) : car d'une part,  $t \mapsto t - f(t)$  est continue sur  $[0, 1]$  en tant que combinaison linéaire de telles fonctions ( $f$  est continue sur  $[0, 1]$  en tant qu'élément de  $E$ ), et d'autre part, d'après 4.a,  $\forall t \in [0, 1], t - f(t) \geq 0$ .

Donc, pour tout  $f \in E, I(f) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], f(t) = t$

- (c) Soit  $f \in E$ . Montrons que  $\int_0^1 f(t) dt > 0$ .

Comme  $f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) \in [0, 1]$ .

Donc, en particulier,  $\forall t \in [0, 1], f(t) \geq 0$ .

De plus,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  en tant qu'élément de  $E$ .

Donc,  $\int_0^1 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], f(t) = 0$ .

Or,  $f(1) = 1$  donc  $\exists t \in [0, 1], f(t) \neq 0$ . En vertu de l'équivalence précédente,  $\int_0^1 f(t) dt \neq 0$

Or,  $f$  étant continue et positive sur  $[0, 1]$  en tant qu'élément de  $E$ , la propriété de positivité de l'intégration (les bornes étant rangées dans le sens croissant ( $0 < 1$ )) nous donne que :  $\int_0^1 f(t)dt \geq 0$

Ainsi, (1) et (2) nous donnent que :  $\int_0^1 f(t)dt > 0$ . Comme  $2 > 0$ ,  $2 \int_0^1 f(t)dt > 0$

D'où  $1 - 2 \int_0^1 f(t)dt < 1$ . Or, d'après 2.b,  $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t)dt$ .

Donc,  $\boxed{\text{pour tout } f \in E, I(f) < 1}$

(d) i. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une vérification rapide, similaire à celle menée en 3.a, nous assure que  $f_n \in E$ .

D'après 2.b,  $I(f_n) = 1 - 2 \int_0^1 f_n(t)dt$ . Or,

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}$$

Donc,  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I(f_n) = 1 - \frac{2}{n+1}}$

ii. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ . Par passage à l'inverse, produit puis somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right) = 1$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = 1$ .

Par définition, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|I(f_n) - 1| < \varepsilon$ .

Soit  $A \in [0, 1[$ . On pose  $\varepsilon = 1 - A > 0$ .

On dispose alors de  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|I(f_n) - 1| < 1 - A$ .

Donc, pour tout  $n \geq N$ ,  $A - 1 < I(f_n) - 1 < 1 - A$ , et en particulier,  $A < I(f_n)$ .

Comme  $N \geq N$ , on a  $A < I(f_N)$ . De plus,  $f_N \in E$  par la question précédente.

Il vient :  $\boxed{\text{pour tout réel } A \text{ vérifiant } 0 \leq A < 1, \text{ il existe } f \in E \text{ telle que } A < I(f)}$ .

5. (a)  $\tilde{f} : t \mapsto t - f(t)$  est continue sur  $[0, 1]$  en tant que combinaison linéaire de telles fonctions.

D'après le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Donc, il existe  $a \in [0, 1]$  tel que  $\tilde{f}(a) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)$ . Raisonnons par disjonction des cas :

• Cas 1 :  $a \in ]0, 1[$ . Posons  $t_0 = a$ . Alors,  $t_0 \in ]0, 1[$  et  $\tilde{f}(t_0) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)$ .

• Cas 2 :  $a \in \{0 ; 1\}$ . Comme  $f \in E$ ,  $\tilde{f}(a) = 0$ . Ainsi,  $\max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t) = 0$  donc,  $\forall t \in [0, 1], \tilde{f}(t) \leq 0$ .

Or, nous avons montré en 4.a que  $\forall t \in [0, 1], \tilde{f}(t) \geq 0$ . Ainsi, nécessairement,  $\forall t \in [0, 1], \tilde{f}(t) = 0$ .

Ainsi,  $\forall z \in [0, 1], \tilde{f}(z) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t) = 0$ . En particulier,  $\tilde{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)$ .

Ainsi, dans tous les cas, nous avons montré :  $\boxed{\exists t_0 \in ]0, 1[, \tilde{f}(t_0) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)}$

(b) Soit  $f \in E$ . D'après 2.a,  $\tilde{f}$  est concave sur  $[0, 1]$ . Ainsi,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, \tilde{f}(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \geq \lambda \tilde{f}(t_1) + (1 - \lambda)\tilde{f}(t_2)$$

Soit  $t \in [0, t_0]$ . Avec  $\lambda = \frac{t}{t_0}$  (réel compris entre 0 et 1 correctement défini car  $t_0 > 0$  et  $t \in [0, t_0]$ ). et

$t_1 = \frac{t}{t_0}$  et  $t_2 = 0$ , nous avons :

$$\tilde{f}\left(\frac{t}{t_0}t_0 + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)0\right) \geq \frac{t}{t_0}\tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\tilde{f}(0)$$

Or,  $\tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0 - 0 = 0$  (car  $f \in E$ ) donc

$$\tilde{f}(t) \geq \frac{t}{t_0}\tilde{f}(t_0)$$

Finalement,  $\boxed{\forall f \in E, \forall t \in [0, t_0], \tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t}{t_0}}$

(c) Soit  $f \in E$ . D'après 2.a,  $\tilde{f}$  est concave sur  $[0, 1]$ . Ainsi,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, \tilde{f}(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \geq \lambda \tilde{f}(t_1) + (1 - \lambda)\tilde{f}(t_2)$$

Soit  $t \in [t_0, 1]$ . Avec  $\lambda = \frac{t-1}{t_0-1}$  et  $t_1 = t_0$  et  $t_2 = 1$  ( $\star$ ) nous avons :

$$\tilde{f}\left(\frac{t-1}{t_0-1}t_0 + \left(1 - \frac{t-1}{t_0-1}\right) \times 1\right) \geq \frac{t-1}{t_0-1}\tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t-1}{t_0-1}\right)\tilde{f}(1)$$

( $\star$ ) : comme  $0 < t_0 \leq t \leq 1$ , on a  $-1 < t_0 - 1 \leq t - 1 \leq 0$ , et comme  $t_0 \in ]0, 1[$ ,  $t_0 - 1 < 0$ . Ainsi,  $1 \geq \frac{t-1}{t_0-1} \geq 0$  et donc  $\frac{t-1}{t_0-1} \in [0, 1]$ .

Or,  $\tilde{f}(1) = 1 - f(1) = 1 - 1 = 0$  (car  $f \in E$ ).

De plus,  $\frac{t-1}{t_0-1}t_0 + \left(1 - \frac{t-1}{t_0-1}\right) \times 1 = \frac{(t-1)t_0 + t_0 - 1 - t + 1}{t_0 - 1} = \frac{t(t_0 - 1)}{t_0 - 1} = t$ .

Donc, après simplifications,

$$\tilde{f}(t) \geq \frac{t-1}{t_0-1}\tilde{f}(t_0)$$

Ainsi,  $\boxed{\forall f \in E, \forall t \in [t_0, 1], \tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t-1}{t_0-1}}$

(d) Soit  $f \in E$ . D'après 5.b,  $\forall t \in [0, t_0], \tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t}{t_0}$ . Par croissance de l'intégration (les fonctions mises en jeu étant continues sur  $[0, t_0]$  et les bornes rangées dans le sens croissant  $0 \leq t_0$ ), on a :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t) dt \geq \int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0) \frac{t}{t_0} dt$$

Or,  $\int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0) \frac{t}{t_0} dt = \left[ \frac{\tilde{f}(t_0) t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=t_0} = \tilde{f}(t_0) \frac{t_0}{2}$ . Ainsi,  $\int_0^{t_0} \tilde{f}(t) dt \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t_0}{2}$  ( $\star$ ).

De même, d'après 5.b,  $\forall t \in [t_0, 1], \tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t-1}{t_0-1}$ . Par croissance de l'intégration (les fonctions mises en jeu étant continues sur  $[t_0, 1]$  et les bornes rangées dans le sens croissant  $t_0 \leq 1$ ), on a :

$$\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t) dt \geq \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t_0) \frac{t-1}{t_0-1} dt$$

Or,  $\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t_0) \frac{t-1}{t_0-1} dt = \left[ \tilde{f}(t_0) \frac{(t-1)^2}{2(t_0-1)} \right]_{t=t_0}^{t=1} = -\tilde{f}(t_0) \frac{t_0-1}{2} = \tilde{f}(t_0) \frac{1-t_0}{2}$ .

Ainsi,  $\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t) dt \geq \frac{1-t_0}{2}$  ( $\star\star$ ).

Ainsi, par sommation membre par membre des inégalités ( $\star$ ) et ( $\star\star$ ) :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t) dt + \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t) dt \geq \tilde{f}(t_0) \frac{t_0}{2} + \tilde{f}(t_0) \frac{1-t_0}{2}$$

En utilisant la relation de Chasles au niveau du membre de gauche, et en simplifiant celui de droite, nous avons :

$$\int_0^1 \tilde{f}(t) dt \geq \tilde{f}(t_0) \frac{1}{2}$$

Donc, comme  $2 > 0$ ,

$$2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt \geq \tilde{f}(t_0)$$

Or, par définition  $I(f) = 2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt$  donc,  $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{pour tout } f \in E, I(f) \geq \tilde{f}(t_0)}$

## II. Le cas à densité

6. (a) Soit  $M > 0$ . Pour tout  $x \geq M$ , on a d'après la relation de Chasles,

$$\int_0^x \nu g(\nu) d\nu = \int_0^M \nu g(\nu) d\nu + \int_M^x \nu g(\nu) d\nu$$

Pour tout  $x \geq M$ , la fonction  $\nu \mapsto \nu g(\nu)$  est positive, continue et non identiquement nulle sur  $[0, x]$ . Alors, par positivité de l'intégrale, pour tout  $x \geq M$ ,

$$\int_0^M \nu g(\nu) d\nu > 0 \quad \text{et} \quad \int_M^x \nu g(\nu) d\nu \geq 0$$

Donc pour tout  $x \geq M$ ,

$$\int_0^x \nu g(\nu) d\nu \geq \int_0^M \nu g(\nu) d\nu$$

Par préservation des inégalités larges par passage à la limite,

$$m \geq \int_0^M \nu g(\nu) d\nu > 0$$

Il vient :  $\boxed{m > 0}$

(b) Comme  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , d'après le théorème fondamental de l'analyse,  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $G'(x) = g(x)$ . Par hypothèse,  $g$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement positive sur  $]0, +\infty[$ . Ainsi,  $G'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$  sauf éventuellement en un nombre fini de points. On en déduit que  $G$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

De plus,  $G(0) = \int_0^0 g(\nu) d\nu = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$ .

D'après le théorème de la bijection monotone,  $\boxed{G \text{ induit une bijection de } [0, +\infty[ \text{ sur } [0, 1[}$ .

(c) D'après le théorème de la bijection monotone,  $G^{-1}$  et  $G$  ont le même sens de variation donc  $\boxed{G^{-1} \text{ est strictement croissante sur } [0, 1[}$ .

7. (a) Comme  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , d'après le théorème fondamental de l'analyse,  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $G'(x) = g(x)$ .  
Effectuons le changement de variables  $u = G(\nu)$  (ie  $\nu = G^{-1}(u)$ ). Fixons  $t \in [0, 1]$ .

- Bornes : si  $u = 0$ , alors  $\nu = G^{-1}(0) = 0$  car  $G(0) = 0$  et si  $u = t$  alors  $\nu = G^{-1}(t)$ .
- Différentielle :  $du = G'(\nu) d\nu = g(\nu) d\nu$
- Intégrande :

$$G^{-1}(u) = G^{-1}(G(\nu)) = \nu$$

Par changement de variables,

$$\int_0^t G^{-1}(u) du = \int_0^{G^{-1}(t)} \nu g(\nu) d\nu = \int_0^t G^{-1}(u) \times g(G^{-1}(u)) \times \frac{du}{g(G^{-1}(u))}$$

(b) On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \nu g(\nu) d\nu = m$ .

De plus, d'après 6.c,  $G^{-1}$  est strictement croissante et non majorée sur  $[0, 1[$  (car à valeurs dans  $[0, +\infty[$ ). Par le théorème de convergence monotone,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} G^{-1}(t) = +\infty$ .

Par composition,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^{G^{-1}(t)} \nu g(\nu) d\nu = m$

Avec la question précédente,  $\boxed{\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t G^{-1}(u) du = m}$

8. (a) i. D'après le théorème de la bijection monotone, la fonction  $G^{-1}$  est continue sur  $[0, 1[$ . Ainsi, la fonction  $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$  est continue par le théorème fondamental de l'analyse. De plus,

d'après 6.a,  $m > 0$ . Par conséquent,  $t \mapsto \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)du$  est continue sur  $[0, 1[$ .

Or, cette fonction coïncide avec  $f$  sur  $[0, 1[$  donc  $f$  est continue sur  $[0, 1[$ .

De plus, avec la question précédente,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t G^{-1}(u)du = m$  donc  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \frac{1}{m}m = 1 = f(1)$

Ainsi  $f$  est continue en 1.

On en déduit que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

ii. D'après le théorème fondamental de l'analyse,  $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$  est l'unique primitive de  $G^{-1}$  sur  $[0, 1[$  s'annulant en 0 : elle est donc dérivable sur  $[0, 1[$  et de dérivée égale à  $G^{-1}$ .

En particulier,  $t \mapsto \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)du$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et de dérivée égale à  $\frac{1}{m}G^{-1}$ .

Cette fonction coïncide avec  $f$  sur  $[0, 1[$  donc  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et de dérivée égale à  $\frac{1}{m}G^{-1}$ .

Or, d'après 6.c,  $G^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0, 1[$ . De plus,  $\frac{1}{m} > 0$  donc la fonction  $\frac{1}{m}G^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0, 1[$ .

On en déduit que  $f$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

iii. •  $f$  est définie sur  $[0, 1]$ .

•  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$

• Par la question, 8.a.i,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

• D'après la question précédente,  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$  de dérivée  $\frac{1}{m}G^{-1}$ .

Par la question 6.b,  $G^{-1}$  est à valeurs dans  $[0, 1[$  donc positive. On en déduit que  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

La fonction  $f$  étant continue sur  $[0, 1]$ , on en déduit que  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

Ainsi, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f(0) \leq f(t) \leq f(1)$

D'où, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq f(t) \leq 1$ .

Ainsi,  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .

• D'après la question précédente,  $f$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

En vertu de tous les points précédents,  $f$  est un élément de  $E$ .

(b) Pour le moment, fixons  $b \in ]0, 1[$ . Alors

$$2 \int_0^b (t - f(t))dt = 2 \int_0^b tdt - 2 \int_0^b f(t)dt = b^2 - 2 \int_0^b f(t)dt$$

Les fonctions  $t \mapsto t$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, b]$  (on a montré, à la question 8.a.ii, que  $f$  est dérivable sur  $[0, 1[$  de dérivée  $\frac{1}{m}G^{-1}$  qui est une fonction continue sur  $[0, 1[$ )

En effectuant une intégration par partie, on a

$$\int_0^b f(t)dt = [tf(t)]_0^b - \int_0^b tf'(t)dt = bf(b) - \frac{1}{m} \int_0^b tG^{-1}(t)dt$$

Dans cette dernière intégrale, effectuons le changement de variables  $\nu = G^{-1}(t)$  c'est-à-dire  $t = G(\nu)$  (licite car  $G$  est bijective et de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[0, 1]$ )

• Bornes : si  $t = 0$ , alors  $\nu = 0$  et si  $t = b$  alors  $\nu = G^{-1}(b)$ .

• Différentielle :  $dt = G'(\nu)d\nu = g(\nu)d\nu$

• Intégrande :

$$tG^{-1}(t) = \nu G(\nu)$$

Par changement de variables,

$$\int_0^b t G^{-1}(t) dt = \int_0^{G^{-1}(b)} \nu g(\nu) G(\nu) d\nu$$

Finalement, on en déduit :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^b (t - f(t)) dt &= b^2 - 2 \left( bf(b) - \frac{1}{m} \int_0^b t G^{-1}(t) dt \right) \\ &= b^2 - 2bf(b) - \frac{2}{m} \int_0^{G^{-1}(b)} \nu g(\nu) G(\nu) d\nu \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $G(x) \in ]0, 1[$  (question 6.b), donc l'égalité ci-dessus avec  $b = G(x)$  donne

$$\frac{2}{m} \int_0^x \nu g(\nu) G(\nu) d\nu = G(x)^2 - 2G(x)f(G(x)) - 2 \int_0^{G(x)} (t - f(t)) dt$$

La fonction  $t \mapsto (t - f(t))$  est continue sur  $[0, 1]$  d'après la question précédente. Ainsi, par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction  $y \mapsto \int_0^y (t - f(t)) dt$  est continue sur  $[0, 1]$ . Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$  donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{G(x)} (t - f(t)) dt = \int_0^1 (t - f(t)) dt = \frac{1}{2} I(f)$$

Par somme et produit,

$$\frac{2}{m} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \nu g(\nu) G(\nu) d\nu = 1^2 - 2 \times 1f(1) - I(f) = 1 - 2 - I(f) = -1 - I(f)$$

D'où

$$I(f) = -1 - \frac{2}{m} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \nu g(\nu) G(\nu) d\nu$$

9. (a) Pour tout  $x > 0$ ,

$$G(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

(b) Soit  $u \in [0, 1[$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} G(x) = u &\iff 1 - e^{-\lambda x} = u \\ &\iff 1 - u = e^{-\lambda x} \\ &\iff \ln(1 - u) = -\lambda x \quad (1) \\ G(x) = u &\iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) \end{aligned}$$

(1) : car  $1 - u > 0$  et par bijectivité de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$ .

On en déduit que  $G(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$

(c) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto -e^{-\lambda t}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

En procédant à une intégration par parties,

$$\int_0^x tg(t) dt = [-te^{-\lambda t}]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t} dt = -xe^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = -xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

Or,  $\lambda > 0$  donc  $-\lambda x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$  et par composition et produit  $\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Par le théorème de croissances comparées,  $xe^{-\lambda x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . On en déduit que  $\int_0^x tg(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda}$

Par unicité de la limite,  $m = \frac{1}{\lambda}$

(d) En utilisant les questions 8, 9.b et 9.c et la linéarité de l'intégrale, on a

$$f(t) = \frac{1}{1/\lambda} \int_0^t G^{-1}(u) du = \lambda \int_0^t \left( -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) \right) du = - \int_0^t \ln(1-u) du$$

(e) Posons  $h : u \mapsto (1-u) \ln(1-u) - (1-u)$ . Cette fonction est dérivable sur  $[0, 1[$  comme composée de fonction qui sont dérivables sur leur domaine de définition. De plus, pour tout  $u \in [0, 1[$ ,

$$h'(u) = -\ln(1-u) + (1-u) \frac{-1}{1-u} - (-1) = -\ln(1-u) - 1 + 1 = -\ln(1-u)$$

Donc  $h$  est une primitive de  $u \mapsto -\ln(1-u)$  sur  $[0, 1[$ . Ainsi, pour tout  $t \in [0, 1[$ ,

$$f(t) = - \int_0^t \ln(1-u) du = \int_0^t -\ln(1-u) du = [h(u)]_0^t = (1-t) \ln(1-t) - (1-t) - (1 \times \ln(1) - 1)$$

$$\boxed{\text{D'où } f(t) = (1-t) \ln(1-t) + t}$$

(f) Pour le moment, fixons  $b \in [0, 1[$ .

Les fonctions  $t \mapsto -\frac{1}{2}(1-t)^2$  et  $t \mapsto \ln(1-t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1[$ .

En effectuant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt &= \left[ -\frac{1}{2}(1-t)^2 \ln(1-t) \right]_0^b + \frac{1}{2} \int_0^b (1-t)^2 \times \frac{-1}{1-t} dt \\ &= -\frac{1}{2}(1-b)^2 \ln(1-b) - \frac{1}{2} \int_0^b (1-t) dt \\ &= -\frac{1}{2}(1-b)^2 \ln(1-b) - \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}(1-t)^2 \right]_0^b \\ \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt &= -\frac{1}{2}(1-b)^2 \ln(1-b) + \frac{1}{4}(1-b)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Or,  $1-b \xrightarrow{b \rightarrow 1} 0$  et d'après le théorème des croissances comparées,  $x^2 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Par composition,  $(1-b)^2 \ln(1-b) \xrightarrow{b \rightarrow 1} 0$ .

Par somme,

$$-\frac{1}{2}(1-b)^2 \ln(1-b) + \frac{1}{4}(1-b)^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow{b \rightarrow 1} -\frac{1}{4}$$

Ainsi,  $\lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt$  existe et vaut  $-\frac{1}{4}$ .

(g) Pour le moment, fixons  $b \in [0, 1[$ .

$$2 \int_0^b (t - f(t)) dt = 2 \int_0^b t dt - 2 \int_0^b f(t) dt = b^2 - 2 \int_0^b f(t) dt$$

D'après la question 9.e et par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^b f(t) dt = \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt + \int_0^b t dt = \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt + \frac{b^2}{2}$$

Il vient :

$$2 \int_0^b (t - f(t)) dt = b^2 - 2 \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt - b^2 = -2 \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt$$

Par la question précédente,  $\int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt \xrightarrow{b \rightarrow 1} -\frac{1}{4}$  donc,  $-2 \int_0^b (1-t) \ln(1-t) dt \xrightarrow{b \rightarrow 1} \frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $2 \int_0^b (t - f(t)) dt \xrightarrow{b \rightarrow 1} \frac{1}{2}$ .

De plus, on a déjà montré, à la question 8.b, que  $2 \int_0^b (t - f(t)) dt \xrightarrow{b \rightarrow 1} I(f)$

Par unicité de la limite,

$$\boxed{I(f) = \frac{1}{2}}$$

### III. Application à une population

10. (a) • Par définition,  $N = X + Y$ . Or, par hypothèse,  $Y > 0$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathbb{N}$  et  $x_i \neq 0$ .

Donc,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i > 0$  puis  $\sum_{i=1}^n x_i > 0$  d'où  $X > 0$ .

Ainsi,  $X + Y > 0$  donc  $N > 0$ .

Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les fractions définissant  $p_i, q_i$  et  $r_i$  sont correctement définies.

De plus,  $N > 0, X > 0$  et  $Y > 0$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq 0$  et  $y_i \geq 0$  ( $y_i \in \mathbb{N}$ ), et donc  $n_i = x_i + y_i \geq 0$ .

Par conséquent,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{n_i}{N} \geq 0$  et  $\frac{x_i}{X} \geq 0$  et  $\frac{y_i}{Y} \geq 0$  donc  $p_i \geq 0$  et  $q_i \geq 0$  et  $r_i \geq 0$ .

- Nous avons :

$$\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{X} = \frac{1}{X} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{X} X = 1$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{Y} = \frac{1}{Y} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{Y} Y = 1$$

Enfin :

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \right) = \frac{1}{N} (X + Y) = \frac{1}{N} N = 1$$

Ainsi, en vertu des trois points précédents, il existe trois probabilités  $P, Q$  et  $R$  sur  $\Omega$  telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(\{c_i\}) = p_i, Q(\{c_i\}) = q_i \text{ et } R(\{c_i\}) = r_i$$

- (b) Par hypothèse,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n$$

Or,  $\varepsilon = \frac{X}{N}$  et  $X > 0$  et  $N > 0$  donc  $\varepsilon > 0$ . Ainsi,

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \leq \dots \leq \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon}$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{x_i/n_i}{X/N} = \frac{x_i/X}{n_i/N} = \frac{q_i}{p_i}$ . D'où  $\boxed{\frac{q_1}{p_1} \leq \frac{q_2}{p_2} \leq \dots \leq \frac{q_n}{p_n}}$

- (c)  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{r_i}{p_i} = \frac{y_i/Y}{n_i/N} = \frac{y_i/n_i}{Y/N} = \frac{(n_i - x_i)/n_i}{(N - X)/N} = \frac{1 - x_i/n_i}{1 - X/N} = \frac{1 - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon}$  Or, par hypothèse,

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n$$

Donc,

$$1 - \varepsilon_1 \geq 1 - \varepsilon_2 \geq \dots \geq 1 - \varepsilon_n$$

Or, comme  $N = X + Y$  avec  $X > 0$  et  $Y > 0$ , et  $\varepsilon = \frac{X}{N}, 0 < \varepsilon < 1$  et donc  $1 - \varepsilon > 0$ .

Ainsi,

$$\frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon} \geq \frac{1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon} \geq \dots \geq \frac{1 - \varepsilon_n}{1 - \varepsilon}$$

D'où  $\boxed{\frac{r_1}{p_1} \geq \frac{r_2}{p_2} \geq \dots \geq \frac{r_n}{p_n}}$

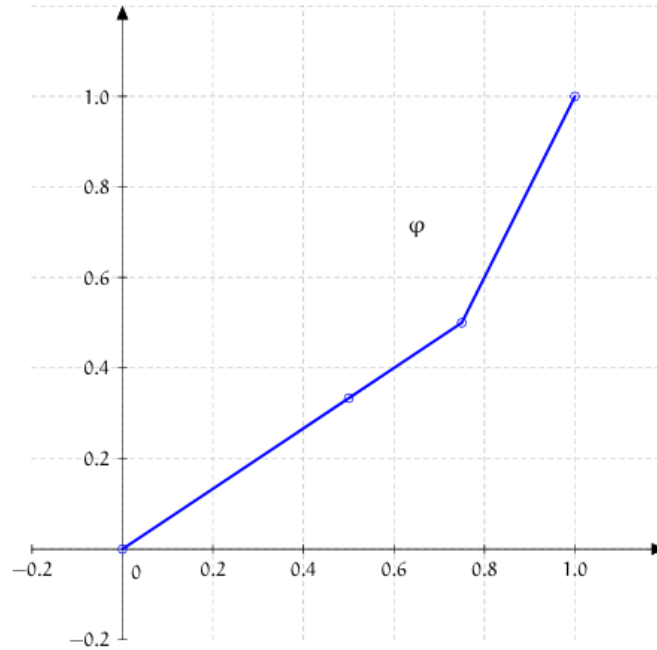
- (d) Nous avons :  $N = X + Y$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, n_i = x_i + y_i$  donc,  $Y = N - X$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i = n_i - x_i$ .

De plus, par définition,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, r_i = \frac{y_i}{Y}$  donc  $\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, r_i = \frac{n_i - x_i}{N - X}}$

D'après 10.c,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{r_i}{p_i} = \frac{1 - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon}$ . Ainsi,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, r_i = p_i \frac{1 - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon} = \frac{p_i - p_i \varepsilon_i}{1 - \varepsilon}$ .

Or,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \varepsilon_i = \frac{x_i n_i}{n_i N} = \frac{x_i X}{X N} = q_i \varepsilon$ . Par conséquent,  $\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, r_i = \frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon}}$

11. (a) On commence par calculer  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ . Avec  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , on trouve  $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ . Puis on calcule  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ . Avec  $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ , on trouve  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$ . Pour tracer  $\varphi$ , on trace la ligne brisée s'appuyant sur les points de coordonnées  $(P_i, Q_i)$  ( $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ). On obtient alors la courbe suivante :



- (b) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pente de la droite passant par les points  $(P_{i-1}, Q_{i-1})$  et  $(P_i, Q_i)$  est égale à

$$\frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}}$$

Or,  $P_i - P_{i-1} = \sum_{h=1}^i p_h - \sum_{h=1}^{i-1} p_h = p_i$ . De même,  $Q_i - Q_{i-1} = q_i$ .

Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pente de la droite passant par les points de coordonnées  $(P_{i-1}, Q_{i-1})$  et  $(P_i, Q_i)$  est égale à  $u_i = \frac{q_i}{p_i}$

- (c) Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On sait par hypothèse que  $\varphi$  est affine sur  $[P_i, P_{i+1}]$ . De plus, d'après 11.b, la pente de la droite passant par les points de coordonnées  $(P_i, Q_i)$  et  $(P_{i+1}, Q_{i+1})$  vaut  $u_{i+1}$ . Ainsi, on dispose d'un réel  $b$  tel que  $\forall t \in [P_i, P_{i+1}], \varphi(t) = u_{i+1}t + b$ . Or,  $\varphi(P_i) = Q_i$  et  $P_i \in [P_i, P_{i+1}]$ . Donc,  $Q_i = u_{i+1}P_i + b$  et donc  $b = Q_i - u_{i+1}P_i$ . Ainsi,  $\forall t \in [P_i, P_{i+1}], \varphi(t) = u_{i+1}t + Q_i - u_{i+1}P_i$ . Alors,  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [P_i, P_{i+1}], \varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$

- (d) Montrons que  $\varphi$  appartient à E.

- Comme  $P = (p_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une loi de probabilité d'après 10.a, et comme  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ , on en déduit que  $(P_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une suite croissante de premier terme  $P_0 = 0$  (d'après l'énoncé), et de dernier terme  $P_n = \sum_{h=1}^n p_h = 1$ .

Ainsi, en tant qu'application définie par morceaux sur chaque intervalle  $[P_i, P_{i+1}]$ , et ce pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\varphi$  est bien définie sur  $[0, 1]$ .

- De même,  $Q = (q_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une loi de probabilité d'après 10.a, et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q_i = \sum_{h=1}^i q_h$ , donc on en déduit que  $(Q_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une suite croissante de premier terme  $Q_0 = 0$  (d'après l'énoncé),

et de dernier terme  $Q_n = \sum_{h=1}^n q_h = 1$ .

De plus,  $\varphi$  est définie comme étant une fonction affine sur  $[P_i, P_{i+1}]$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , croissante sur  $[P_i, P_{i+1}]$  car de pente égale à  $u_i = \frac{q_i}{p_i} \geq 0$  avec  $\varphi(P_i) = Q_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Or,  $\forall t \in [0, 1], \exists i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_i \leq t \leq P_{i+1}$  et donc,  $\varphi(P_i) \leq \varphi(t) \leq \varphi(P_{i+1})$ .

Alors,  $\forall t \in [0, 1], \exists i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, 0 = Q_0 \leq Q_i \leq \varphi(t) \leq Q_{i+1} \leq Q_n = 1$ .

Ainsi,  $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \in [0, 1]$ . On en déduit que  $\varphi$  est à valeurs dans  $[0, 1]$ .

- Par construction,  $\varphi$  est continue sur  $[0, 1]$  en tant que fonction affine par morceaux (continue à droite et à gauche au niveau de chacun des points de raccord) ;
- $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$ ;
- $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$ ;
- De plus, on admet conformément à l'énoncé que les inégalités obtenues en 10.b nous donne que  $\varphi$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Donc, en vertu des points précédents, on en déduit que  $\boxed{\varphi \text{ est un élément de } E}$ .

(e) D'après 10.c,  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in [P_i, P_{i+1}], \varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} (u_{i+1}(t - P_i) + Q_i) dt \\ &= \left[ u_{i+1} \frac{(t - P_i)^2}{2} + Q_i t \right]_{t=P_i}^{t=P_{i+1}} \\ &= u_{i+1} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i (P_{i+1} - P_i) \\ &= \frac{Q_{i+1} - Q_i}{P_{i+1} - P_i} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i (P_{i+1} - P_i) \\ &= \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2} (P_{i+1} - P_i) + Q_i (P_{i+1} - P_i) \\ &= (P_{i+1} - P_i) \left( \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2} + Q_i \right) \\ &= \frac{1}{2} (P_{i+1} - P_i) (Q_{i+1} + Q_i) \end{aligned}$$

Alors,  $\boxed{\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} (P_{i+1} - P_i) (Q_{i+1} + Q_i)}$

(f) Nous avons :

$$I(\varphi) = 1 - 2 \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (1)$$

$$= 1 - 2 \int_{P_0}^{P_n} \varphi(t) dt \quad (2)$$

$$= 1 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt \quad (3)$$

$$= 1 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} (P_{i+1} - P_i) (Q_{i+1} + Q_i) \quad (4)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) (Q_{i+1} + Q_i) \quad (5)$$

(1) : d'après 2.b

(2) : car  $P_0 = 0$  et  $P_n = 1$

(3) : d'après la relation de Chasles

(4) : d'après 11.e

(5) : par linéarité de  $\Sigma$

$$\text{Ainsi, } I(\varphi) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i)(Q_{i+1} + Q_i)$$

12. (a) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pente de la droite passant par les points  $(P_{i-1}, R_{i-1})$  et  $(P_i, R_i)$  est égale à

$$\frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}}$$

Or,  $P_i - P_{i-1} = \sum_{h=1}^i p_h - \sum_{h=1}^{i-1} p_h = p_i$ . De même,  $R_i - R_{i-1} = r_i$ .

Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pente de la droite passant par les points de coordonnées  $(P_{i-1}, R_{i-1})$

et  $(P_i, R_i)$  est égale à  $v_i = \frac{r_i}{p_i}$

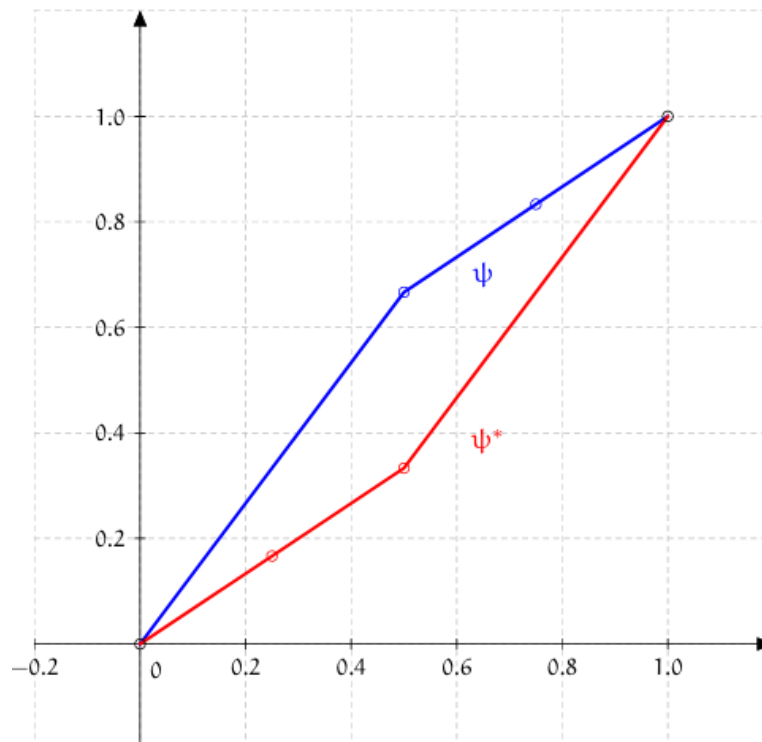
- (b) i. On calcule  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ . Avec  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , on trouve  $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$ .  
 Puis on calcule  $(R_0, R_1, R_2, R_3)$ . Avec  $R = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ , on trouve  $(R_0, R_1, R_2, R_3) = (0, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1)$ .  
 Pour tracer  $\psi$ , on trace la ligne brisée s'appuyant sur les points de coordonnées  $(P_i, R_i)$  ( $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ).

Remarquons que les graphes de  $t \mapsto \psi(1-t)$  et  $\psi$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$ .

De plus, les graphes de  $t \mapsto 1 - \psi(1-t)$  et  $t \mapsto \psi(1-t)$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .

Ainsi, pour obtenir le graphe de  $\psi^*$ , on part de celui de  $\psi$  et on lui applique la symétrie par rapport à la droite  $x = \frac{1}{2}$  puis la symétrie par rapport à la droite  $y = \frac{1}{2}$ .

En fin de compte, nous obtenons les représentations graphiques suivantes :



- ii. En s'inspirant de l'énoncé de la question 11.d, on admet que les inégalités obtenues en 10.c induisent le fait que  $\psi$  est concave sur  $[0, 1]$ .

Ainsi, d'après l'énoncé,  $-\psi$  est convexe sur  $[0, 1]$ . Montrons alors que  $\psi^*$  est convexe sur  $[0, 1]$ . Soit  $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ .

Soit  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
 \psi^*(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= 1 - \psi(1 - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)) \\
 &= 1 - \psi(1 - \lambda t_1 - t_2 + \lambda t_2) \\
 &= 1 - \psi(1 - \lambda t_1 - t_2 + \lambda t_2 + \lambda - \lambda) \\
 &= 1 - \psi(\lambda(1 - t_1) + (1 - \lambda)(1 - t_2)) \\
 &= 1 + (-\psi)(\lambda(1 - t_1) + (1 - \lambda)(1 - t_2))
 \end{aligned}$$

Or, comme  $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ ,  $(1 - t_1, 1 - t_2) \in [0, 1]^2$

Donc, par convexité de  $-\psi$  sur  $[0, 1]$ , nous avons, par définition :

$$(-\psi)(\lambda(1 - t_1) + (1 - \lambda)(1 - t_2)) \leq \lambda(-\psi)(1 - t_1) + (1 - \lambda)(-\psi)(1 - t_2)$$

Ainsi,

$$1 + (-\psi)(\lambda(1 - t_1) + (1 - \lambda)(1 - t_2)) \leq 1 + \lambda(-\psi)(1 - t_1) + (1 - \lambda)(-\psi)(1 - t_2)$$

Donc, d'après les égalités précédentes :

$$\psi^*(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq 1 - \lambda\psi(1 - t_1) - (1 - \lambda)\psi(1 - t_2)$$

Or,

$$\begin{aligned}
 1 - \lambda\psi(1 - t_1) - (1 - \lambda)\psi(1 - t_2) &= \lambda - \lambda + 1 - \lambda\psi(1 - t_1) - (1 - \lambda)\psi(1 - t_2) \\
 &= \lambda(1 - \psi(1 - t_1)) + (1 - \lambda)(1 - \psi(1 - t_2)) \\
 &= \lambda\psi^*(t_1) + (1 - \lambda)\psi^*(t_2)
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\psi^*(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda\psi^*(t_1) + (1 - \lambda)\psi^*(t_2)$$

Ceci étant vrai pour tout  $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\boxed{\psi^* \text{ est convexe sur } [0, 1]}$

iii. Soit  $\sigma : t \mapsto 1 - t$ . Alors, par définition,  $\psi^* = \sigma \circ \psi \circ \sigma$ .

Or,  $\sigma$  est une fonction affine réalisant une bijection strictement décroissante de l'intervalle  $[\Pi_i, \Pi_{i+1}]$  sur l'intervalle  $[1 - \Pi_{i+1}, 1 - \Pi_i] = [P_{n-i-1}, P_{n-i}]$ , et ce pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Or, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\psi$  est affine sur  $[P_{n-i-1}, P_{n-i}]$ .

Ainsi,  $\boxed{\psi^* \text{ est affine sur } [\Pi_i, \Pi_{i+1}]}$ , et ce pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

iv. D'après 12.b.i,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\psi^*(\Pi_i) = 1 - R_{n-i}$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pente de  $\psi^*$  sur  $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$  est égale à

$$\frac{\psi^*(\Pi_i) - \psi^*(\Pi_{i-1})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} = \frac{(1 - R_{n-i}) - (1 - R_{n-i+1})}{(1 - P_{n-i}) - (1 - P_{n-i+1})} = \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}}$$

Or, d'après les notations du 12.a, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} = v_{n-i+1}$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ la pente de } \psi^* \text{ sur } [\Pi_{i-1}, \Pi_i] \text{ est égale à } v_{n-i+1}}$ .

13. (a) On suppose que  $\varphi = \psi^*$ .

Alors, nécessairement, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P_i = \Pi_i$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la pente de la de  $\varphi$  sur  $[P_i, P_{i+1}]$  est égale à la pente de  $\psi^*$  sur  $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u_i = v_{n-i+1}$ .

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$u_i = \frac{q_i}{p_i} = \frac{x_i/X}{n_i/N} = \frac{x_i/n_i}{X/N} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$

et

$$\begin{aligned}
 v_{n-i+1} &= \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} \\
 &= \frac{y_{n-i+1}/Y}{n_{n-i+1}/N} \\
 &= \frac{y_{n-i+1}/n_{n-i+1}}{Y/N} \\
 &= \frac{(n_{n-i+1} - x_{n-i+1})/n_{n-i+1}}{(N - X)/N} \\
 &= \frac{1 - x_{n-i+1}/n_{n-i+1}}{1 - X/N} \\
 &= \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}$ .

On en déduit que  $\boxed{\text{si } \varphi = \psi^* \text{ alors pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}}$ .

(b) On suppose que  $\varphi = \psi^*$ . Alors, d'après 13.a,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}$ . Donc,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - \varepsilon_{n-i+1}) \quad (\star)$$

Or,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $n - i + 1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Donc, nous avons également :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(1 - \varepsilon)\varepsilon_{n-i+1} = \varepsilon(1 - \varepsilon_{n-(n-i+1)+1})$ . D'où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon)\varepsilon_{n-i+1} = \varepsilon(1 - \varepsilon_i) \quad (\star\star)$$

En additionnant membre à membre les égalités  $(\star)$  et  $(\star\star)$ , nous avons, après factorisation :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = \varepsilon(2 - (\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}))$$

Alors,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon - \varepsilon(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1})$$

C'est-à-dire

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon + \varepsilon)(\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}) = 2\varepsilon$$

Finalement,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$ .

On a montré que  $\boxed{\text{si } \varphi = \psi^*, \text{ alors } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon}$ .

(c) On suppose que  $\varphi = \psi^*$ . Alors, d'après 13.a,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}$ .

D'après 13.b,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$  d'où  $\varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon - \varepsilon_i$ , puis

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - (2\varepsilon - \varepsilon_i)}{1 - \varepsilon}$$

Donc,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - 2\varepsilon + \varepsilon_i}{1 - \varepsilon}$$

C'est-à-dire

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - 2\varepsilon + \varepsilon_i)$$

Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - \varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - 2\varepsilon) + \varepsilon\varepsilon_i$$

Puis,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - 2\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$$

Finalement,  $\boxed{\text{si } \varphi = \psi^*, \text{ alors } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (1 - 2\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)}$ .

(d) On a supposé dans cette question que  $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$ . On suppose que  $\varphi = \psi^*$ .

Donc, d'après 13.c,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(1 - 2\varepsilon)\varepsilon_i = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$ .

Comme  $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$ ,  $2\varepsilon - 1 \neq 0$  et alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon$ .

Ainsi, si  $\varphi = \psi^*$  alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon$ .

Or,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_i = \frac{x_i}{n_i}$ . Par conséquent, si  $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$  (autrement dit, si les deux classes n'ont pas le même effectif) et si  $\varphi = \psi^*$ , alors la proportion des individus de la classe I au niveau de chacune des catégories numérotées de 1 à  $n$  est la même quelle que soit la catégorie considérée.

Remarquons que l'on peut également dire la même chose à propos des individus de la classe II, puisque  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{y_i}{n_i} = 1 - \varepsilon_i = 1 - \varepsilon$ .

Cette situation traduit l'absence totale d'inégalité sociale.