Chapitre 23 : Applications linéaires

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

Table des matières

I. Généralités sur les applications linéaires **2**

1. Notion d'application linéaire, propriétés élémentaires 2
2. Propositions fondamentales : applications linéaires et bases 4
3. Vocabulaire : endomorphisme, automorphisme, isomorphisme 4
4. Applications linéaires et opérations 5

II. Sous-espaces vectoriels associés à une application linéaire, théorème du rang **6**

1. Noyau d'une application linéaire 6
2. Image d'une application linéaire 6
3. Le théorème du rang 7

III. Applications linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et matrices **8**

1. Applications linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ 8
2. Rang d'une matrice 10
3. Opérations matricielles et applications linéaires 10
4. L'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ 10

IV. Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ **11**

1. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ 11
2. Matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ 11
3. Application linéaire associée à une matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ 12

I. Généralités sur les applications linéaires

Rappels sur les applications.

Soit $f : A \to B$ une application entre deux ensembles A et B.

- On dit que f est injective si pour tous a et a' éléments de A :
$$f(a) = f(a') \implies a = a'.$$
- On dit que f est surjective si pour tout $b \in B$:
$$\exists a \in A, f(a) = b.$$
- On dit que f est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit, si :
$$\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b.$$

Rappels sur les utilisations antérieures du mot "linéaire".

Si u et v sont deux vecteurs d'un espace vectoriel E, alors on appelle combinaison linéaire de u et v tout vecteur de la forme $\lambda u + \mu v$, pour λ et μ réels.

- Le symbole somme vérifie une propriété de linéarité : pour tous réels $a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n$, pour tous réels λ et μ :
$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$
- La dérivation est linéaire : pour toutes fonctions f get g dérivables sur un intervalle I, pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
- L'espérance est linéaire : si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et qui admettent une espérance, alors pour tous réels λ et μ, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :
$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$
- La propriété de linéarité de l'intégrale s'écrit (dès que ça fait sens) :
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t) \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t) \mathrm{d}t.$$

Dans tous ces cas, le terme "linéaire" désigne une "compatibilité" entre une opération (somme dérivation, espérance, intégration) et les combinaisons linéaires.

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés seront supposés de dimension finie, c'est-à-dire qu'on supposera qu'ils admettent tous une base finie.

1. Notion d'application linéaire, propriétés élémentaires

Définition 1. Soient E et F deux espaces vectoriels.

(*i*) Soient $f : E \to F$ une application. On dit que f est une ***application linéaire*** si :
- $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

(*ii*) On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Voici une conséquence immédiate de la définition.

Proposition 2. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,*

$$f(0_E) = 0_F.$$

Démonstration. À noter. □

En pratique, pour montrer qu'une application est linéaire, on utilise plutôt la caractérisation suivante plus économe en calculs.

Proposition 3. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application. Alors, f est linéaire si et seulement si :*

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x,y) \in E^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 4. Montrons que $f : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}\right.$ est une application linéaire.

Exemple 5. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

(i) $g : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, y+z) \end{array}\right.$.

(ii) $h : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+1) \end{array}\right.$

(iii) $h : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2-y^2 \end{array}\right.$

Exercice 6. Montrer que pour toute application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un réel a tel que :

$$f : x \mapsto ax.$$

Remarque. Soient E et F deux espaces vectoriels.

- L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)} : \left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}\right.$ est linéaire. Il existe donc toujours une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
- L'application identité $\mathrm{Id}_E : \left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ est linéaire.

Proposition 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

(i) $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

(ii) Pour tous éléments $x_1, \dots, x_n$ de E (où $n \in \mathbb{N}^*$), pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Le second point dit que la propriété de linéarité s'étend aux combinaisons linéaires de plus de deux vecteurs.

2. Propositions fondamentales : applications linéaires et bases

Soient f et g deux applications linéaires $E \to F$, où E et F sont des espaces vectoriels.

À priori, pour vérifier que $f = g$, il faudrait démontrer que $f(x) = g(x)$ pour ***tout*** élément x de E.

La proposition ci-dessous rend la tâche beaucoup plus facile, à condition de disposer d'une base de E.

Proposition 8. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.*
Supposons donnée une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
Alors, il est équivalent de dire :

(i) $f = g$, *et*

(ii) $\forall i \in [\![1, n]\!], f(e_i) = g(e_i)$.

Démonstration. À noter. □

On peut même aller plus loin :

Proposition 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels.*
Supposons donnée une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
Alors, pour tous vecteurs $v_1, \dots v_n$ de F, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], f(e_i) = v_i.$$

Remarque. Autrement dit, ces deux proposition disent que :
- Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ,
- on peut construire une application linéaire simplement en choisissant les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

Démonstration. À noter. □

Exemple 10. Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $C_1, \dots, C_p$ p éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
D'après cette proposition, il existe une unique application linéaire $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) = C_i.$$

Vérifions que cette application est :

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ v & \longmapsto & Av \end{array} \right.$$

où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre, $C_1, \dots C_p$.

3. Vocabulaire : endomorphisme, automorphisme, isomorphisme

Définition 11. (*i*) Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle ***isomorphisme*** de E vers F toute application linéaire $E \to F$ bijective.

(*ii*) Soit E un espace vectoriel. On appelle ***endomorphisme de*** E toute application linéaire $E \to E$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

(*iii*) On appelle ***automorphisme*** de l'espace vectoriel E tout endomorphisme bijectif.

Ces notions seront importantes, car on comprendra petit à petit que si l'on dispose d'un isomorphisme de E vers F, alors tous les raisonnements que l'on pourra faire sur E (par exemple) pourront s'adapter pour F, tant que ceux-ci concernent (uniquement) des propriétés relatives aux opérations d'espaces vectoriels.

Voici une clarification essentielle :

Proposition 12. *Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimension finie). Il est équivalent de dire :*

(i) E et F sont isomorphes, c'est-à-dire : il existe un isomorphisme $E \to F$.

(ii) $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. À noter. ☐

Exemple 13. L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

Exemple 14. L'application $\left|\begin{array}{ccc} R^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0, \dots, a_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

4. Applications linéaires et opérations

Proposition 15. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Démonstration. À noter. ☐

Exemple 16. (i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\phi_0 : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array}\right.$ est une application linéaire.

(ii) Montrer que $D : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}\right.$ est une application linéaire.

(iii) En déduire que $\Gamma : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(0) \end{array}\right.$ est une application linéaire.

Proposition 17. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et f, g deux applications linéaires de E vers F.*
Alors, pour tous réels λ et μ, l'application

$$\lambda f + \mu g : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array}\right.$$

est linéaire.
Autrement dit, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Démonstration. À noter. ☐

Remarque. On peut aller plus loin et dire que $\mathcal{L}(E, F)$ **est muni d'une structure d'espace vectoriel**.

Exemple 18. Montrer que $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & 2P(1) + P'(0) \end{array}\right.$ est linéaire.

II. Sous-espaces vectoriels associés à une application linéaire, théorème du rang

1. Noyau d'une application linéaire

Définition 19. Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. On appelle ***noyau de*** f l'ensemble noté $\mathrm{Ker}(f)$ donné par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\}.$$

Remarque. La notation $\mathrm{Ker}(f)$ vient de l'allemand ("Kern" signifie noyau).

Proposition 20. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. À noter. □

Remarque. Voici un nouveau moyen de démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : en montrant que c'est le noyau d'une application linéaire.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$, on considère simplement l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$

Exemple 21. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$.

(*i*) Vérifier rapidement que f est linéaire.

(*ii*) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(*iii*) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, et donner $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Exemple 22. Même exercice avec $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Voici quelques points fondamentaux sur le noyau.

Proposition 23. *Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application linéaire.*

(i) Pour tous éléments x et y de E : $f(x) = f(y) \iff x - y \in \mathrm{Ker}(f)$.

(ii) f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. À noter. □

2. Image d'une application linéaire

Définition 24. Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. On appelle ***image de*** f l'ensemble noté $\mathrm{Im}(f)$ donné par :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \,|\, \exists x \in E, f(x) = y\} = \{f(x)\,;\, x \in E\}.$$

Proposition 25. *Avec les notations de la définition ci-dessus, il est équivalent de dire :*

(i) f est surjective, et

(ii) $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Immédiat en revenant aux définitions. □

Exemple 26. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f((x,y)) = (2x+2y, -x-y)$ (on vérifiera rapidement que f est linéaire).
Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par une famille de vecteurs, et déterminer sa dimension.

Proposition 27. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
Alors, $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. À noter. □

Il est en fait très facile d'avoir une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 28. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
Supposons donnée une base $(e_1, \dots e_n)$ de E. Alors, la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. *Autrement dit :*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)).$$

Démonstration. À noter. □

Remarque. Cette proposition est valable pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

Définition 29. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle ***rang de l'application linéaire*** f l'entier noté $\mathrm{rg}(f)$ donné par :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$$

D'après la proposition précédente, pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a donc :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Remarque. Le rang $\mathrm{rg}(f)$ d'une application linéaire f est bien défini car $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie comme sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie.

Exemple 30. Vérifier que l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, y-z) \end{array} \right.$ est linéaire, déterminer son noyau et son rang.

3. Le théorème du rang

C'est l'un des grands théorèmes du chapitre. Sa démonstration sera vue en seconde année.

Théorème 31. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors :*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 32. Cet énoncé permet de lier $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
Considérons par exemple l'application linéaire $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array} \right.$.

(i) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ puis $\mathrm{rg}(f)$.
(ii) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

On pourrait de même déduire $\mathrm{rg}(f)$ de l'étude de $\mathrm{Ker}(f)$.

Voici une conséquence majeure.

Proposition 33. *Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimension finie) et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Supposons $\dim(E) = \dim(F)$.*
Alors, il est équivalent de dire :

(i) f est injective,
(ii) f est surjective,
(iii) f est bijective.

Démonstration. À noter. □

Proposition 34. *(Cas particulier) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.*
Il est équivalent de dire :

(i) f est injective,
(ii) f est surjective,
(iii) f est bijective.

Démonstration. Voir la proposition précédente dans le cas $F = E$. □

Remarque. Ainsi, pour montrer qu'un endomorphisme est un automorphisme (i.e., est bijectif), il suffit de montrer, au choix, qu'il est injectif ou surjectif. C'est-à-dire, au choix, que :

(i) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, ou
(ii) $\mathrm{Im}(f) = E$.

Exemple 35. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ v & \longmapsto & Av \end{array} \right.$.

(i) Montrer que f est une application linéaire.
(ii) Montrer que f est injective.
(iii) En déduire que f est bijective.
(iv) Montrer que A est inversible. En déduire une autre démonstration de la bijectivité de f, en déterminant la réciproque de f.

III. Applications linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et matrices

1. Applications linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Commençons par remarquer que toute matrice défini une application linéaire.

Définition 36. (et proposition). Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^*)^2$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle ***application linéaire canoniquement associée à*** M l'application

$$\phi_M : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \right. .$$

Cette application est linéaire.

Démonstration. À noter. □

Exemple 37. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Ce qui est remarquable, c'est que ce sont les seules applications linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 38. (et définition). *Soit* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Notons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $C_i = f(e_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre,* $C_1, \dots, C_p$.
On dit que M ***est la matrice canoniquement associée à*** f.
Alors f *est l'application linéaire canoniquement associée à* M.

Démonstration. À noter. □

Exemple 39. Considérons l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{array} \right.$. On montre facilement que f est linéaire.
Déterminer la matrice canoniquement associée à f, et en déduire une autre description de f.

Remarque. Dans le contexte de la proposition ci-dessus, notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La matrice canoniquement associée à f est alors notée : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$.

Remarque. Bilan des deux dernières propositions.
Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(*i*) L'application $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est linéaire.

(*ii*) Il est équivalent de dire :
- f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice M,
- M est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire f,
- $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), f(X) = MX$.

(*iii*) Toute application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'application linéaire associée à une matrice.

(*iv*) Pour déterminer la matrice canoniquement associée à f,
- on considère la base canonique $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,
- on calcule $f(e_1), \dots f(e_p)$,
- et on forme la matrice dont ce sont les colonnes, dans l'ordre.

Dans la partie suivante, on généralisera cela aux cas des espaces vectoriels $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
Pour aller plus loin, cette correspondance se généralise au cas général des applications linéaires de E vers F, où E et F sont des espaces vectoriels (de dimension finie). Les matrices correspondantes sont éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$, et la construction est similaire.

Une conséquence directe de tout cela :

Proposition 40. *Soit* $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *une application linéaire, et* M *la matrice canoniquement associée à* f.
Alors :

(i) $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{n,1}\}$.

(ii) $\mathrm{Im}(f) = \{MX \,;\, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

Démonstration. À noter. □

Exemple 41. L'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle injective ? surjective ?

2. Rang d'une matrice

Définition 42. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Notons $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de A (qui sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
On appelle ***rang de la matrice*** A l'entier :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

Exemple 43. Quel est le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Proposition 44. *Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit M la matrice canoniquement associée à f.*
Alors, $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration. À noter. ☐

Proposition 45. *Pour toute matrice A,* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

Démonstration. Propriété admise. ☐

3. Opérations matricielles et applications linéaires

La correspondance entre les applications linéaires et les matrices établie une correspondance entre les opérations suivantes :

- Du côté des applications linéaires, les combinaisons linéaires et la composition des applications.
- Du côté des matrices, les combinaisons linéaires et le produit matriciel.

Proposition 46. *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.*
Notons respectivement $M_f \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M_g \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ les matrices canoniquement associées à f et g.
Alors, pour tous réels λ et μ, $\lambda M_f + \mu M_g$ est la matrice canoniquement associée à $\lambda f + \mu g$.

Démonstration. À noter. ☐

Proposition 47. *Soient $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ et $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $g : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ deux applications linéaires.*
Notons respectivement $M_f \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M_g \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ les matrices canoniquement associées à f et g.
Alors, la matrice canoniquement associée à l'application linéaire $g \circ f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est :

$$M_{g\circ f} := M_g \times M_f \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}).$$

Démonstration. À noter. ☐

4. L'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$

Voici un cas simple d'un résultat de seconde année, qui résume une grande partie des résultats de la partie III.

Proposition 48. *Soit* $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
- *Notons, pour tout* $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\phi_M : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *l'application linéaire canoniquement associée à* M.
- *Notons, pour tout* $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, $\mathrm{Mat}(f)$ *la matrice canoniquement associée à* f.

Alors, l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \\ M & \longmapsto & \phi_M \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'isomorphisme réciproque

$$\mathrm{Mat} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f) \end{array}.$$

Démonstration. Tout ce qu'il y a à vérifier a déjà été démontré dans les parties précédentes. □

IV. Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, on fixe n et p deux entiers naturels non nuls.

On va voir, dans un cas simple (celui de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$), comment cette correspondance entre applications linéaires et matrices se généralise à d'autres espaces vectoriels que les espaces de matrices colonnes.

1. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$

Proposition 49. *Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* $\mathbb{R}^n$.
Alors, l'application

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Cela signifie simplement que :
- (Injectivité) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant les mêmes coordonnées dans une base sont égaux.
- (Surjectivité) Tout élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la matrice des coordonnée d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$.
- (Linéarité) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

2. Matrice associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$

La matrice des coordonnées d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est particulièrement simple. Il suffit de "transposer" ce vecteur pour en faire un vecteur colonne.

Définition 50. (et proposition). Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Notons respectivement $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.
Notons, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $C_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(f(e_i))$ la matrice des coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$.
On appelle ***matrice associée à*** f ***dans les bases canoniques de*** $\mathbb{R}^p$ ***et*** $\mathbb{R}^n$ la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)$ donnée en colonnes par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) = \begin{pmatrix} C_1 & \vdots & C_2 & \vdots & \ldots & \vdots & C_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(x).$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 51. Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, 2x-y-z) \end{array} \right.$. Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
Vérifier, dans ce cas, la propriété vérifiée par celle ci.

Remarque. Cela signifie simplement que, si on "transpose" les éléments de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ pour les écrire comme vecteurs colonnes, alors toute application linéaire entre ces espaces est, comme dans la partie précédente, obtenue comme le produit par une matrice.

3. Application linéaire associée à une matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$

Même morale que pour la partie précédente. Dans cette sous partie, on note toujours $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Proposition 52. (et définition). *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*
Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, notons $\varphi_M(x) = (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ l'unique n-uplet donné par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(x).$$

Alors :

(i) L'application $\varphi : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \varphi_M(x) \end{array} \right.$ est linéaire.

(ii) $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(\varphi_M)$.

(iii) Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$,

$$f = \varphi_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}(f)}.$$

On dit que φ_M (notation non standard) est l'application linéaire associée à la matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. À noter. □

Remarque. Tout ceci est résumé par la relation, pour tous $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_M((x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots y_n) \iff M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Exemple 53.

(*i*) Déterminons l'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

(*ii*) Toute application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est de la forme φ_M, en prenant simplement pour M la matrice associée à f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

(*iii*) La base canonique permet d'exprimer ce changement de point de vue nous permettant de ramener des applications linéaires à des matrices.

(*iv*) En seconde année, on généralise cela à des bases quelconques. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases respectives des espaces vectoriels E et F, alors toute application linéaire $f : E \to F$ se verra associée une matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dont la construction est similaire. Les colonnes de cette matrice sont les matrices des coordonnées, dans $\mathcal{C}$, des vecteurs $f(e_1), \ldots f(e_n)$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.