

Programme de colle n° 28 : Variables aléatoires (chapitre complet). Équations différentielles linéaires à coefficients constants (début).

Semaine du lundi 25 mai.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Moments d'une variable aléatoire : espérance, variance.

28.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète : définitions (cas fini, cas infini), proposition admise : pour le cas infini, la convergence absolue en hypothèse assure que la définition est bien posée. Linéarité de l'espérance. Positivité de l'espérance. Toute variable aléatoire discrète à valeurs positives d'espérance nulle est presque-sûrement nulle. Corollaire : si une VAD X prends ses valeurs dans un intervalle réel I et admet une espérance, alors $E(X) \in I$. Notion de variable aléatoire centrée, variable aléatoire centrée associée à une VAD admettant une espérance.

28.2 Théorème de transfert : cas fini (démonstration peu formelle exigible), cas infini (admis).

28.3 Variance d'une variable aléatoire discrète : définitions (cas fini et infini). Si une VAD X admet une variance, alors $V(X) \geq 0$ et $V(X) = 0$ ssi X est presque-sûrement constante. Écart-type.

28.4 Lemme admis : Soit X une VAD telle que X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance. Formule de Koenig-Huygens. Moment d'ordre 2 d'une VAD. Routine : utilisation combinée du théorème de transfert et de la formule de Koenig-Huygens. Variance d'une transformée affine d'une VAD admettant une variance. Variable aléatoire discrète centrée réduite, variable aléatoire centrée réduite associée à une VAD admettant une variance non nulle.

28.5 Illustration de toutes ces notions dans le cas d'une variable aléatoire donnant le rang du premier pile lors d'une succession de lancers d'une pièce à pile ou face (loi géométrique).

Lois usuelles finies

28.6 Une motivation pour s'intéresser aux lois des VAD: si deux VAD X et Y ont la même loi, alors X admet une espérance (resp. une variance) ssi Y admet une espérance (resp. une variance), et dans ce cas $E(X) = E(Y)$ (resp. $E(X) = E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$).

28.7 Loi certaine, espérance et variance. Toute variable aléatoire discrète admettant une variance nulle suit une loi certaine de paramètre $E(X)$.

28.8 Loi uniforme sur $[[1, n]]$: définition, espérance et variance. Loi uniforme sur $[[a, b]]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([1, b - a + 1])$. Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[a, b]]$.

28.9 Loi de Bernoulli : définition, espérance, variance.

28.10 Loi binomiale : définition, espérance, variance. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Lois usuelles infinies

28.11 Loi géométrique : définition, espérance, variance. Fonction de survie, fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique. Toute VAD X suivant une loi géométrique est "sans mémoire".

28.12 Loi de Poisson : définition, espérance, variance. Proposition de "convergence en loi" de lois binomiales vers une loi de Poisson.

La notion de convergence en loi est hors programme cette année. La proposition portant sur la convergence des binomiales vers une loi de Poisson n'a été vue que pour une suite (X_n) de VAD telle que, pour un certain $\lambda > 0$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ pour tout n .

Généralités sur les équations différentielles linéaires

28.13 Introduction : exposition rapide de deux modèles de dynamique des population.

28.14 Notion d'équation différentielle linéaire : définition et vocabulaire (ordre, solution, résolution, coefficients, second membre, équation différentielle linéaire homogène, équations différentielles linéaires à coefficients constants). Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

28.15 Principe de superposition pour les équations différentielles linéaires. Utilisation du principe de superposition en considérant l'équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

Python

28.16 Simulations de phénomènes aléatoires : module `numpy.random`, commandes `randint`, `random` de `numpy.random`. Diagramme en bâtons. Utilisation de la loi uniforme pour simuler des expériences aléatoires discrètes. Moyenne statistique et espérance.

Quelques questions de cours

1. Définir la notion d'indépendance mutuelle pour un nombre fini d'événements. Énoncer la définition et la proposition portant sur la notion d'indépendance pour les variables aléatoires, et démontrer la proposition dans le cas vu en cours (pour l'appartenance à des ensembles finis).
2. Énoncer les deux propositions relatives aux transformées de variables aléatoires discrètes. Soit X une VAD telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.
3. Définir la notion d'espérance pour une variable aléatoire discrète. Énoncer la proposition de linéarité de l'espérance, et la démontrer dans le cas d'une transformation affine.
4. Énoncer le théorème de transfert et le démontrer dans le cas fini (colleur : preuve assez informelle mais très claire). Soit X une VAD telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour $p \in]0, 1[$. Étudier l'existence de $E(e^X)$, et la calculer lorsque cette espérance existe.
5. Définir la notion de variance pour une variable aléatoire discrète. Énoncer et démontrer la proposition (49) portant sur le signe d'une variance, et sur les VAD de variance nulle. Démontrer la proposition (54) portant sur la variance d'une transformée affine d'une VAD admettant une variance.
6. Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.
7. Décrire, en utilisant tout le vocabulaire de la première partie, les équations différentielles suivantes (au choix du colleur - une doit être facile à résoudre avec le cours). Pour chaque équation différentielle linéaire donnée, l'élève identifiera en particulier un intervalle de définition convenable, les coefficients et le second membre. L'élève donnera une solution de l'une d'elles.
8. Énoncer et démontrer le principe de superposition.
9. Simuler une expérience aléatoire discrète, comme un lancer de dé truqué (au choix de l'interrogateur)

Les démonstrations des résultats ci-dessous sont exigibles.

10. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
11. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
12. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
13. Loi, espérance et variance d'une VAD $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.