

Chapitre 24 : Intégrales Impropres

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

Table des matières

I. Intégrales impropres en $-\infty$ et $+\infty$	2
1. Généralités	2
2. Intégrales doublement impropres	4
3. Techniques classiques de calcul d'intégrales impropres	5
4. Propriétés élémentaires des intégrales impropres	5
5. Intégrales impropres et fonctions positives	6
6. Intégrales impropres absolument convergentes	7
II. Intégrales impropres en un point	8
1. Généralités	8
2. Intégrales faussement impropres en un point	9
3. Généralisation des résultats de la première partie	9
4. Intégrales doublement impropres : cas général	10

Ce cours est une introduction nécessaire pour le cours des variables aléatoires à densité, qui forment avec les variables aléatoires discrètes les deux grandes familles de variables aléatoires au programme d'ECG. Ces variables aléatoires à densité font intervenir des objets comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

et nécessitent donc de commencer par des compléments sur les intégrales impropres.

I. Intégrales impropres en $-\infty$ et $+\infty$

L'idée est simple. Sous réserve d'existence, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est l'aire algébrique sous la courbe de f entre a et $+\infty$. Celle-ci n'existe pas toujours.

┌ **Exemple 1.** Dessins à noter.

1. Généralités.

Définition 2. Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$.

(i) Si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, on dit que *l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

(ii) Sinon, on dit que *l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **diverge**. Et on ne donne aucune valeur à $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

Dans tous les cas, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

On fait la même chose en $-\infty$.

Définition 3. Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $] -\infty, a]$.

(i) Si $\int_x^a f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow -\infty$, on dit que *l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ **converge**. Dans ce cas, on pose :

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

(ii) Sinon, on dit que *l'intégrale impropre* $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ **diverge**. Et on ne donne aucune valeur à $\int_{-\infty}^a f(t)dt$.

Dans tous les cas, on dit que $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ est une intégrale impropre en $-\infty$.

Remarque. Vous ne devez donc pas calculer une intégrale impropre avant d'avoir montré sa convergence, ce qui se ramène à l'étude de la limite de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Remarque. Étudier la nature d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Exemple 4. Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes.

(i) $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt.$

(iii) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt.$

(ii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt.$

(iv) $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt.$

Nous avons les intégrales impropres dites "de référence" suivante :

Proposition 5. Soit α un réel. Alors :

(i) Pour tout réel $a > 0$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} t^\alpha dt$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Autrement dit, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) Pour tout réel $a < 0$, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a t^\alpha dt$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Autrement dit, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(iii) Pour tout réel a , l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} e^{\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

(iv) Pour tout réel a , l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a e^{\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration. À noter. \square

Remarque. Dans chacun des cas convergents ci-dessus, on a été capable de calculer la valeur de cette intégrale impropre. Il faut impérativement savoir refaire ce calcul en un temps record, si cette valeur est requise dans un exercice. En particulier :

$$\text{Si } \alpha > 1 : \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

$$\text{Si } \alpha > 0 : \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Remarque. Pour l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} t^\alpha dt$, a est supposé strictement positif, car la fonction $t \mapsto t^\alpha$ n'est a priori définie que sur \mathbb{R}_+^* . Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut considérer de telles intégrales impropres en $-\infty$ et un calcul simple montre qu'elles divergent.

Exemple 6. Méthode : Pour étudier une intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, on peut à priori procéder en deux étapes :

- Étudier l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ pour $x \geq a$, en la calculant par exemple, puis,
- Faire tendre x vers $+\infty$ pour conclure sur la nature et l'éventuelle valeur de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Avec cette démarche, toutes les techniques classiques de l'intégration peuvent être utilisées dans la première étape. Exemple :

(i) Déterminer la nature et l'éventuelle valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$ (intégration à vue).

(ii) Déterminer la nature et l'éventuelle valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3} dt$ à l'aide d'une intégration par partie.

(iii) Déterminer la nature et l'éventuelle valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $u = e^t$.

Enfin, on a cette nouvelle version de la relation de Chasles qui, en plus de donner une égalité dans le cas convergent, montre que la convergence d'une intégrale impropre ne dépend pas de la "borne finie" considérée (tant qu'elle est licite) :

Proposition 7. Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$. Soit $b \in [a, +\infty[$. Alors, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ converge. Dans ce cas,

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt.$$

On a bien sûr un énoncé similaire en $-\infty$.

Démonstration. À noter. \square

2. Intégrales doublement impropres

Pour travailler avec des objets comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$, il faut vérifier **séparément** les convergences en $-\infty$ et $+\infty$.

Définition 8. (et proposition) Soit f une fonction définie et continue sur \mathbb{R} .

- (i) On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge en $+\infty$ s'il existe un réel a tel que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Cette convergence ne dépend pas du réel a considéré.
- (ii) On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge en $-\infty$ s'il existe un réel a tel que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ converge. Cette convergence ne dépend pas du réel a considéré.
- (iii) On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si elle converge en $-\infty$ et en $+\infty$.

On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale doublement impropre. Si celle-ci converge, alors on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

où a est un réel, et cette définition ne dépend pas du choix du réel a .

Démonstration. À noter. \square

Remarque. Étudier la nature d'une intégrale (ici, doublement) impropre, c'est déterminer si elle converge.

Remarque. Le fait qu'on puisse choisir le réel a rend l'énoncé plus conséquent, mais vous simplifie la vie. Pour étudier une intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, vous pouvez par exemple systématiquement vous ramener à l'étude de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et de $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et, en cas de convergence, vous avez :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Exemple 9. Méthode : Pour étudier une intégrale doublement impropre, on doit donc systématiquement étudier séparément les deux intégrales impropres en $-\infty$ et $+\infty$.

(i) Déterminons la nature et l'éventuelle valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$.

(ii) Déterminons la nature et l'éventuelle valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$.

(iii) Déterminons la nature et l'éventuelle valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$.

Remarque. Si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors la définition donne immédiatement la relation de Chasles suivante : pour tous réels a ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt.$$

Vous pouvez donc retenir que : **sous réserve de convergence des intégrales écrites**, toutes les relations de Chasles qu'on peut vouloir écrire sont vraies. Utiliser la relation de Chasles sur des intégrales impropres avant d'avoir montré leurs convergences est une faute grave.

3. Techniques classiques de calcul d'intégrales impropres

Comme dit plus haut, pour mettre en œuvre changements de variable, intégrations par parties ou intégration à vue, on le fait au niveau de l'intégrale sur un segment considérée avant de passer à la limite.

Pour les intégrales doublement impropres, on peut gagner en efficacité de la manière suivante :

Exemple 10. Étudions la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt$ à l'aide d'une intégration par partie.

4. Propriétés élémentaires des intégrales impropres

Attention

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les énoncés sont donnés pour les intégrales impropres en $+\infty$ mais se transposent tels quels pour les intégrales impropres en $-\infty$, ou les intégrales doublement impropres.

Tout d'abord, comme souvent, un énoncé de linéarité.

Proposition 11. Soit a un réel, et f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent, alors pour tous réels λ et μ , $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)dt$ converge, et :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

Démonstration. En exercice. \square

Remarque. Attention, pour utiliser la linéarité, il faut bien vérifier que les "bonnes" intégrales convergent. On peut facilement fournir un contre exemple montrant qu'en ne vérifiant que la convergence de $\int_a^{+\infty} \lambda f(t) + \mu g(t)dt$, on ne peut pas conclure.

Par exemple, pour $f(t) = t$ et $g(t) = -t$, on a (pour tout réel t) $f(t) + g(t) = 0$, donc $\int_0^{+\infty} (f + g)(t)dt$ converge, mais **l'égalité c-dessous est fausse** :

$$\int_a^{+\infty} (f + g)(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt + \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

car les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} tdt$ et $\int_a^{+\infty} -tdt$ divergent (donc le membre de droite n'est pas défini).

Ensuite, les énoncés de positivité et de croissance de l'intégrale restent vraies pour les intégrales impropres.

Proposition 12. Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

(i) Si : $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \geq 0$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt \geq 0$.

(ii) Si : $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \geq 0$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt = 0$, alors $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) = 0$.

(iii) Si : $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) > 0$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt > 0$.

Remarque. L'énoncé (i) est appelé la positivité de l'intégrale. L'énoncé (iii) est appelé la stricte positivité de l'intégrale (impropre ici).

Démonstration. À noter. \square

Proposition 13. Soit a un réel, et f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Supposons les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergentes.

(i) Si : $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq g(t)$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$.

(ii) Si : $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) < g(t)$, alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt < \int_a^{+\infty} g(t)dt$.

Démonstration. À noter. \square

Remarque. L'énoncé (i) est la propriété de croissance de l'intégrale, l'énoncé (ii) est la propriété de stricte croissance de l'intégrale (impropre ici).

5. Intégrales impropres et fonctions positives

Le développement de la suite de ce cours sur les intégrales impropres est très proche de celui sur les séries à termes positives.

Tout part du lemme suivant, déjà vu dans le cours sur les intégrales.

Proposition 14. Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

Si f est une fonction (resp. strictement) positive, alors la fonction $F : \begin{cases} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{cases}$ est (resp. strictement) croissante.

Démonstration. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable de dérivée f . Par hypothèse (cas f positive - le cas f strictement positive est analogue), F' est donc positive sur $[a, +\infty[$, donc F est croissante sur cet intervalle. \square

Voici les conséquences pratiques.

Proposition 15. Soit a un réel et f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$. Alors, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.
Si ce n'est pas le cas, alors $\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque. "la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$ " se traduit par :

Démonstration. D'après la proposition précédente, $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de la limite monotone, celle-ci admet donc une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée, et tend vers $+\infty$ sinon. Autrement dit, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$, et sinon $\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ \square

Les exercices pouvant faire appel aux deux énoncés précédents sont assez théoriques. Par contre, ces énoncés permettent de démontrer l'énoncé suivant qui lui, vous sera fort utile.

Il s'agit d'un théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives.

Proposition 16. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Supposons :

$$\forall t \in [a, +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors :

(i) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, et :

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$$

(ii) Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Remarque. Cet énoncé sert à montrer des convergences ou des divergences d'intégrales (l'inégalité du (i) est déjà démontrée, par croissance de l'intégrale : ce qui compte est la convergence dans ce cas).

Démonstration. À noter. \square

Exemple 17. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exemple 18. Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t} dt$?

6. Intégrales impropres absolument convergentes

Si f est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, alors $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est continue comme composée de f , continue sur $[a, +\infty[$, par la fonction valeur absolue, continue sur \mathbb{R} . La définition suivante est donc légitime.

Définition 19. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale improprie $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale improprie $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente.

Comme pour les séries :

Proposition 20. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Démonstration. En exercice. Similaire à celle pour les séries numériques. \square

Pour finir cette partie, on a l'inégalité triangulaire.

Proposition 21. Avec les notation précédentes, si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, et on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|dt$$

Démonstration. En exercice. \square

II. Intégrales impropres en un point

On peut également s'interroger sur la bonne définition de quantités comme $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$.

Exemple 22. Dessins à noter.

1. Généralités

Définition 23. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

(i) Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)dt$$

converge (en b) si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Sinon, on dit que cette intégrale impropre diverge.

(ii) Soit f une fonction définie et continue sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)dt$$

converge (en a) si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et est finie. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

Sinon, on dit que cette intégrale impropre diverge.

Étudier la nature d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Remarque. Si f est continue sur $[a, b]$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne toujours l'intégrale de f , continue, sur le segment $[a, b]$, et cela ne crée pas de conflit de notations comme on va le voir dans la sous-partie suivante.

Exemple 24. Étudions la nature des intégrales impropres suivantes.

$$(i) \int_0^1 t dt.$$

$$(ii) \int_0^1 \frac{1}{t} dt.$$

$$(iii) \int_0^1 \frac{1}{t^2} dt.$$

$$(iv) \int_0^1 \ln(t) dt.$$

$$(v) \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{t \ln(-t)} dt.$$

2. Intégrales faussement impropres en un point

Définition 25. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

(i) Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b[$. Si f admet un prolongement par continuité à gauche en b , alors $\int_a^b f(t)dt$ converge (en b). Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement impropre en b . Enfin, si on note \tilde{f} le prolongement par continuité de f à gauche en b , on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$$

(où \tilde{f} est maintenant continue sur $[a, b]$).

(ii) La même définition est valable, mutatis mutandis, pour les intégrales impropres en a de la forme $\int_a^b f(t)dt$.

Remarque. Si f est continue sur $[a, b]$, alors elle est en particulier continue sur $[a, b[$ et sa restriction à $[a, b[$ étant prolongeable par continuité en b (à gauche ici), les deux sens qu'on pouvait donner à $\int_a^b f(t)dt$ sont les mêmes (comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, ou comme intégrale faussement impropre en b). Même remarque en a .

Exemple 26. Que dire de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t} dt$?

3. Généralisation des résultats de la première partie

Voici la version "impropreté en un point" des résultats de la partie précédente.

Proposition 27. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b[$.

(i) Soit $a' \in [a, b[$. Alors, l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge (en b) si et seulement si $\int_{a'}^b f(t)dt$ converge (en b), et dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^b f(t)dt.$$

(ii) Les propriétés de linéarité, de positivité et de croissance des intégrales impropres (en $\pm\infty$) sont aussi vraies pour les intégrales impropres en un point.

(iii) On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument (en b) si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge (en b). Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.

Mutatis mutandis, les mêmes propositions sont vraies pour les intégrales impropres en a .

4. Intégrales doublement impropres : cas général

Dans la suite, on adopte les conventions suivantes :

- Pour tout réel a , $-\infty < a < +\infty$ (idem avec des inégalités larges).
- En particulier, $-\infty < +\infty$ (idem avec des inégalités larges).

Définition 28. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.

On dit que l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe un point $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Les deux points précédents (nature et valeur) ne dépendent pas du point $c \in]a, b[$ choisi.

Dans tous les cas, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale doublement impropre, en a et en b .

Exemple 29. Les mêmes morales et techniques que celles de la première partie sont valables pour ce cas le plus général.

(i) Déterminer la nature $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}$.

(ii) Que dire de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t}$?

(iii) Étudier $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ en fonction de $\alpha > 0$.

(iv) Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{1+t^2} dt$, à l'aide d'un encadrement.