

Programme de colle n° 30 : Applications Linéaires (début).

Semaine du lundi 8 juin.

Le programme de la semaine précédente est toujours au programme de cette semaine.

Équations différentielles : Chapitre complet

Se reporter au programme précédent.

Applications linéaires

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

30.1 Applications linéaires : définition et caractérisation. Image du vecteur nul par une application linéaire. Compatibilité avec les combinaisons linéaires de $n \geq 2$ vecteurs.

30.2 Applications linéaires et bases : deux applications linéaires entre les mêmes espaces vectoriels qui coïncident sur une base de l'espace vectoriel de départ sont égales. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de l'espace vectoriel E et si v_1, \dots, v_n sont des vecteurs de l'espace vectoriel F , alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = v_i.$$

Exemple fondamental dans le cas $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

30.3 Endomorphisme, automorphisme, isomorphisme : définitions. Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils sont de même dimension

30.4 Composée et combinaisons d'applications linéaires

Sous-espaces vectoriels associés à une application linéaire

30.5 Noyau d'une application linéaire : définition et lien avec l'injectivité. Détermination d'une base du noyau d'une application linéaire.

30.6 Image d'une application linéaire : définition et lien avec la surjectivité. Rang d'une application linéaire et détermination d'une base de l'image d'une application linéaire

30.7 Théorème du rang et conséquence : une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.

Admis

Applications linéaires de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et matrices

30.8 Application linéaire canoniquement associée à une matrice et matrice canoniquement associée à une application

30.9 Rang d'une matrice

Python

30.10 Fin du TP sur les phénomènes aléatoires.

Quelques questions de cours

- Définir la notion d'application linéaire. Énoncer et démontrer la caractérisation des applications linéaires.
- Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$. Montrer aussi que f est "compatible avec les combinaisons linéaires" de plus de 2 vecteurs (prop. 7 (ii)).
- Démontrer que $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de base finie.
- Montrer que $(X - 1, X^2 - X, X^2 + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice des coordonnées de $1 + X$ dans cette base.
- Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y + z, x + z) \end{cases}$ (toute variante similaire possible). Montrer que f est linéaire. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = A \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, où \mathcal{B}' (resp. \mathcal{B}) est la base canonique de \mathbb{R}^2 (resp. de \mathbb{R}^3).
- Énoncer la proposition (9) caractérisant l'existence d'une application linéaire donnée par les images des vecteurs d'une base. Démontrer l'unicité.

7. Énoncer la proposition (9) caractérisant l'existence d'une application linéaire donnée par les images des vecteurs d'une base. Démontrer l'existence.
8. Définir le noyau d'une application linéaire. Énoncer et démontrer la proposition (20) donnant le lien entre l'injectivité et le noyau d'une application linéaire.
9. Déterminer le rang et le noyau de $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x+y, y-z) \in \mathbb{R}^2$ (variante possible au choix de l'interrogateur)
10. Simuler, en utilisant seulement la fonction `random`, la loi $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n, p)$ ou $\mathcal{G}(p)$ (au choix de l'examineur)