

TD de mathématiques n°23 : Applications linéaires

Pour commencer

Applications linéaires

Exercice 1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x - 3y, x + y, 2x - y) \end{cases}$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 2 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (y + z, x + z, x + y) \end{cases}$. Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f .

Exercice 3 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x, 1 - x) \end{cases}$. Montrer que f n'est pas linéaire.

Exercice 4 Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ y - 2z \\ 3x + y + z \end{pmatrix} \end{cases}$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 5 Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ -x + y \\ -x - y \end{pmatrix} \end{cases}$. Montrer que f est linéaire et écrire la matrice canoniquement associée à f .

Exercice 6 Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} xy \\ |x| \end{pmatrix} \end{cases}$. Montrer que f n'est pas linéaire.

Exercice 7 Écrire les applications linéaires matricielles canoniquement associées aux matrices suivantes.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f(e_1) = (-1, 1)$, $f(e_2) = (3, 1)$ et $f(e_3) = (1, 0)$. Déterminer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9 Soit (E_1, E_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que $f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f(E_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $f(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que $f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(E_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f(E_3) = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 11 Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, x - y) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (2x - 3y, 2y) \end{cases}$.

- (a) Montrer que f et g sont linéaires.
- (b) Déterminer les matrices A et B canoniquement associées à f et g .
- (c) Déterminer les applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 12 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + 2y + z, y + 2z, -z) \end{cases}$.

Montrer que f est une application linéaire bijective et que f^{-1} est linéaire.

Exercice 13 Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} \end{cases}$.

- (a) Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice A canoniquement associée à f .
- (b) Montrer que f est bijective et déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f .
- (c) Montrer que f^{-1} est linéaire et donner la matrice B canoniquement associée à f^{-1} .
- (d) Comparer B et A^{-1} .

Exercice 14 On considère l'application $p : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} \end{cases}$.

Montrer que p est linéaire et prouver que $p \circ p = p$.

Exercice 15 On considère l'application $s : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} -5x - 6y \\ 4x + 5y \end{pmatrix} \end{cases}$.

Montrer que s est linéaire et montrer que $s \circ s = Id_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

Exercice 16 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x - y + z, -x + y + z, -x - y + 3z) \end{cases}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = \lambda.u\}$.

- (a) Montrer que f est linéaire.
- (b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- (c) Montrer que $f \circ f = 3f - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
- (d) En déduire que pour tout $u \in E_\lambda$, $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)u = 0_{\mathbb{R}^3}$.
- (e) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $E_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- (f) Déterminer la dimension de E_1 .
- (g) Déterminer la dimension de E_2 .

Exercice 17 Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n v_i = 2$.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$f((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) v.$$

- (a) Montrer que f est linéaire.
- (b) Déterminer $f \circ f$.
- (c) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $f(u) \in \text{Vect}(u)$.

Montrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $f(u) = \lambda.u$.

Indication : on pourra faire bon usage de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Noyau et image

Exercice 19 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, y - z, z - x) \end{array}$.

- (a) Montrer que f est linéaire.
 (b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. On donnera une base de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Im}(f)$.
 (c) L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 20 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & -x + 2y + 5z \end{array}$.

- (a) Montrer que f est linéaire.
 (b) Déterminer le rang de f .
 (c) En déduire la valeur de $\dim(\text{Ker}(f))$.
 (d) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 21 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) & \longmapsto & (2a + 3b - c, a + b + c) \end{array}$.

- (a) Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f .
 (b) Déterminer le noyau de f , puis donner une base de $\text{Ker}(f)$.
 (c) Déterminer l'image de f , puis donner une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 22 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + y - 3z \\ 3x + 2y - 4z \end{pmatrix} \end{array}$.

- (a) Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f .
 (b) Déterminer le noyau de f , puis donner une base de $\text{Ker}(f)$.
 (c) Déterminer l'image de f , puis donner une base de $\text{Im}(f)$.
 (d) L'application f est-elle bijective ?

Exercice 23 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX - X \end{array}$.

- (a) Montrer que f est une application linéaire et déterminer la matrice canoniquement associée à f .
 (b) Déterminer le noyau de f , puis donner une base de $\text{Ker}(f)$.
 (c) Déterminer l'image de f , puis donner une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer le rang de A .
 (b) En déduire le noyau de A .
 (c) L'application linéaire f canoniquement associée à A est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1} .

Exercice 25 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer le rang de A .
 (b) Déterminer le noyau de A et donner une base de $\text{Ker}(A)$.

Exercice 26 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = i + j$. Déterminer $\text{rg}(A)$.

Exercice 27 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} = i + j + ij$. Déterminer $\text{rg}(A)$.

Exercice 28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) & \longmapsto & (0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array}$.

- (a) Montrer que f est linéaire.
 (b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et en déduire $\text{rg}(f)$.
 (c) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la valeur de $\text{rg}(f^k)$.

Exercice 29 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto (x_n, \dots, x_1) \end{cases} .$$

(a) Montrer que f est linéaire et déterminer $f \circ f$.

(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{rg}(f)$. **Exercice 30** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire telle que $f(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $f(e_i) = ie_{i-1}$.

(a) Déterminer $\text{Im}(f)$.

(b) Déterminer $\text{Ker}(f)$.

(c) L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 31 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.

(a) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ f)$.

(b) Montrer que $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im}(f)$.

(c) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f \circ f) \iff \text{Im}(f \circ f) = \text{Im}(f)$.

Exercice 32 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

(a) Montrer que : f est injective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.

(b) Montrer que : f est surjective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^p .

(c) Montrer que : f est bijective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de \mathbb{R}^p .

Exercice 33 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications linéaires.

(a) Montrer que $g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

(b) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.

(c) Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.

Exercice 34 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.

Montrer que A est inversible et $B = A^{-1}$.

Indication : considérer les applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ canoniquement associées à A et B .