

TD de mathématiques n°24 : Intégrales impropres

Intégrales impropres

Exercice 1 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- | | | | |
|---|--|---|---|
| (a) $\int_0^{+\infty} 1 dt$ | (d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ | (g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$ | (j) $\int_1^{+\infty} t\sqrt{t} dt$ |
| (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t} dt$ | (e) $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ | (h) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$ | (k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ |
| (c) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$ | (f) $\int_e^{+\infty} t(\ln t)^2 dt$ | (i) $\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt$ | (l) $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ |

Exercice 2 Calculer, si possible, les intégrales généralisées suivantes :

- | | | | |
|---|---|---|--|
| (a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ | (c) $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ | (e) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^3} dt$ | (g) $\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$ |
| (b) $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ | (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(e^t+1)^2} dt$ | (f) $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ | (h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt$ |

Exercice 3 Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$.

Indication : changement de variable $s = \sqrt{t}$.

Exercice 4 Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. En cas de convergence, calculer $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Exercice 5

- (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.
- (b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x e^{-t^2} dt \leq 1$.
- (c) Justifier que la fonction $x \mapsto \int_1^x e^{-t^2} dt$ est croissante sur $[1, +\infty[$.
- (d) En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Déterminer la valeur de $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Interpréter graphiquement.

Exercice 7 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$.

Déterminer les valeurs de $\int_0^2 f(x) dx$ et $\int_{-2}^2 f(x) dx$. Interpréter graphiquement.

Exercice 8 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Déterminer la valeur de $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Interpréter graphiquement.

Exercice 9 Calculer les valeurs des intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |x| dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} |x| dx$. Interpréter graphiquement.