

# Chapitre 25 : Variables aléatoires à densité

ECG1 A 2025-2026, Lycée Hoche

## Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Variables aléatoires à densité</b>                             | <b>2</b>  |
| 1. Compléments sur les fonctions continues par morceaux . . . . .    | 2         |
| 2. Rappels et compléments sur les fonctions de répartition . . . . . | 4         |
| 3. Variable aléatoire à densité . . . . .                            | 7         |
| 4. Une particularité des lois sans atome . . . . .                   | 9         |
| 5. Transformations de variables aléatoires à densité . . . . .       | 9         |
| <b>II. Espérance, variance, moments et transfert</b>                 | <b>11</b> |
| <b>III. Lois à densité usuelles</b>                                  | <b>12</b> |
| 1. Loi uniforme sur un segment. . . . .                              | 12        |
| 2. Loi exponentielle . . . . .                                       | 13        |
| 3. Loi normale . . . . .   | 15        |

# I. Variables aléatoires à densité

Toutes les variables aléatoires réelles introduites sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  quelconque. Tous les résultats de ce cours introductif sont admis.

## 1. Compléments sur les fonctions continues par morceaux

On considérera des fonctions qui ne sont pas continues, mais continues par morceaux.

**Définition 1.** Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. On dit que  $f$  est **continue par morceaux** sur  $I$  s'il existe des points  $x_1, \dots, x_n$  de  $I$  (notés tels que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ ) tels que :

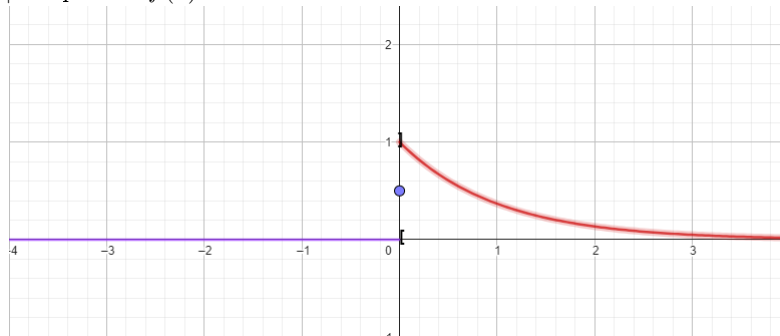
- (i)  $f$  est continue sur  $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , et
- (ii)  $f$  est prolongeable par continuité à gauche et à droite en chacun des  $x_i, 1 \leq i \leq n$ .

Autrement dit,  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  s'il existe un nombre fini de points  $x_1, \dots, x_n$  de  $I$  tels qu'en posant  $x_0 = \inf(I)$ , et  $x_{n+1} = \sup(I)$ ,  $f$  est prolongeable en une fonction continue sur chacun des intervalles  $]x_0, x_1]$ ,  $]x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $]x_{n-1}, x_n]$  et  $]x_n, x_{n+1}[$ .

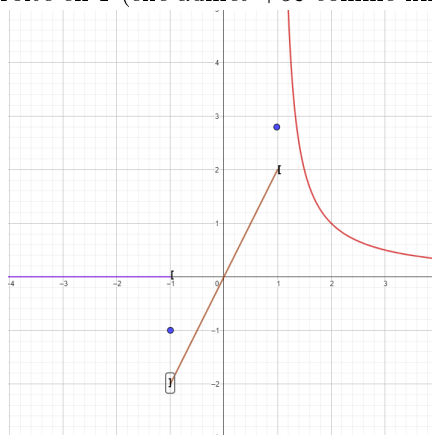
**Remarque.** Plus précisément, avec les notations ci-dessus, c'est la restriction de  $f$  à  $]x_i, x_{i+1}[$  qui doit être prolongeable par continuité sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , pour tout  $i$  convenable.

**Exemple 2.** La fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est continue par morceaux.

En effet, celle-ci est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}_-$  en posant  $f(0) = 0$ , et est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}_+$  en posant  $f(0) = e^{-0} = 1$ .



**Exemple 3.** La fonction représentée ci-dessous n'est pas continue par morceaux. Elle est bien continue sur chaque intervalle  $] - \infty, -1[$ ,  $] - 1, 1[$ , et  $]1, +\infty[$  (donc le premier point est vérifié), mais ne se prolonge pas par continuité à droite en 1 (elle admet  $+\infty$  comme limite à droite en 1).



**Exemple 4. Méthode :** Pour déterminer si une fonction donnée par une formule avec des conditions est continue par morceaux...

- On vérifie si chaque "sous formule" donnée sur un intervalle définit bien une fonction continue sur cet intervalle, puis
- On étudie les limites à droite et à gauche de la fonction en chaque point "de rupture". Si chacune des limites étudiées existe et est finie, on peut conclure que la fonction est continue par morceaux.

On remarquera que la valeur prise par cette fonction en ces "points de rupture" n'a aucune importance pour étudier sa continuité par morceaux (on ne regarde que les limites à droite et à gauche). Étudions les deux cas suivants :

(i) La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

(ii) La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

**Remarque.** La notion de "points de rupture" est **informelle** et ne doit pas être utilisée sur une copie.

On peut intégrer des fonctions par morceaux comme si elles étaient continues.

**Définition 5.** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  des points de  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , et  $f$  est prolongeable par continuité à gauche et à droite en chacun des  $x_i, 1 \leq i \leq n$ . Soit, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $g_i$  le prolongement par continuité de  $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , pour  $1 \leq i \leq n$ . Alors,

(i) Si  $a$  et  $b$  sont deux points de  $[x_i, x_{i+1}]$ , on pose  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g_i(t)dt$ .

(ii) Si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que pour certains  $i$  et  $j$ , on ait :

$$x_i \leq a < x_{i+1} < x_{i+2} \dots < x_j < b \leq x_{j+1}$$

alors on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_{i+1}} f(t)dt + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(t)dt + \dots + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)dt + \int_{x_j}^b f(t)dt.$$

(iii) On étend de la même manière cette définition pour les intégrales impropres  $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ ,  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ , et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ .

**Remarque.** Cela veut juste dire que si  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , on peut définir et calculer des intégrales d'intégrande  $f$  en les découpant sur les intervalles de continuité de  $f$ .

Par exemple, pour la fonction  $f$  donnée sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , qui est continue par morceaux, on aura avant toute réflexion :

$$\int_{-2}^3 f(t)dt = \int_{-2}^0 e^{-\frac{1}{x^2}} dx + \int_0^3 0 dx$$

où  $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$  est prolongée par continuité en 0 dans la première intégrale (par la valeur 0).

**Exemple 6.** Étudier la convergence de l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$  où pour tout réel  $t$ ,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases} .$$

## 2. Rappels et compléments sur les fonctions de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On rappelle que la fonction de répartition de  $X$  est la fonction notée  $F_X$  et définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Les résultats suivants ont déjà été abordés :

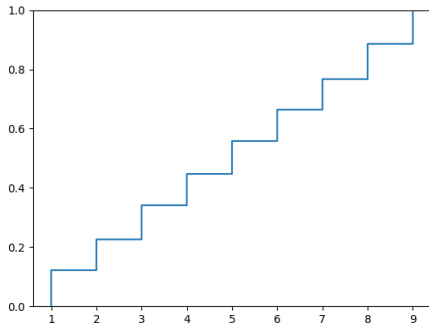
**Proposition 7.** Avec les notations ci-dessus :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0, 1]$ ,
- (ii)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,
- (iii)  $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$  et  $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ ,
- (iv)  $F_X$  est continue à droite en tout point de  $\mathbb{R}$ ,
- (v)  $F_X$  admet une limite finie à gauche en tout point de  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $a$  :

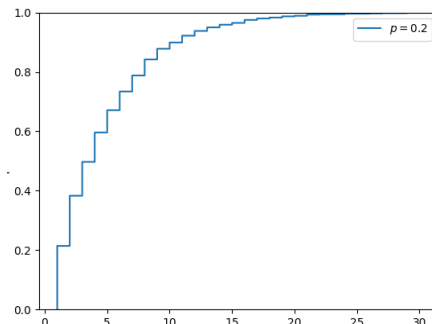
$$\lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < a).$$

De plus, on a vu que la connaissance de  $F_X$  permettait de retrouver la loi de  $X$ .

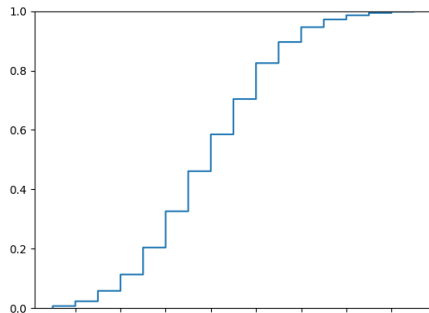
Voici quelques fonctions de répartition de variables aléatoires discrètes.



Loi  $\mathcal{U}([1, 9])$ .



Loi  $\mathcal{G}(0, 2)$ .



Loi  $\mathcal{B}(50, \frac{1}{5})$ .

*Ces graphiques réalisés avec Python font apparaitre des traits horizontaux, qu'on ne trace pas d'habitude.*

On remarque que ces fonctions de répartition d'une variable aléatoire **discrète**  $X$  ne sont pas continues. Leurs points de discontinuité sont précisément les points  $x \in \mathbb{R}$ , tels que  $\mathbb{P}(X = x)$  soit non nul.

Le "saut" effectué est alors

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F_X(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F_X(t).$$

**Définition 8.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On dit que  $x$  est un *atome* pour la loi de  $X$  si

$$\mathbb{P}(X = x) \neq 0.$$

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète, connaître le comportement de  $X$  revient, d'après l'une des morales du chapitre sur les VA discrètes, à connaître sa loi, donc à connaître la probabilité attribuée à chacun de ses atomes. Alors, la fonction de répartition apparaît comme une donnée alternative et équivalente à la donnée de sa loi.

**La situation est radicalement différente** pour les variables aléatoire à densité. Voici le cas dans lequel nous serons.

**Définition 9.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On dit que la loi de  $X$  est *sans atome* (ou *diffuse*) si elle n'a pas d'atomes, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Pourquoi introduire cette notion ?

Prenons l'exemple du temps d'attente d'un bus arrivant toutes les 10 minutes, modélisé par une variable aléatoire réelle  $X$  comptant ce temps en minutes (avec décimales). On fait les hypothèses suivantes :

- $\alpha$ ) Le bus est très régulier, et passe très exactement toutes les 10 minutes.
- $\beta$ ) Sans information sur ses horaires, on suppose n'avoir aucune information sur son dernier passage. On veut donc modéliser le problème en disant qu'il y a "autant de chances que le bus soit passé il y a 10 minutes, que 3 minutes, que 2,574 secondes..."

Il faut comprendre ici que :

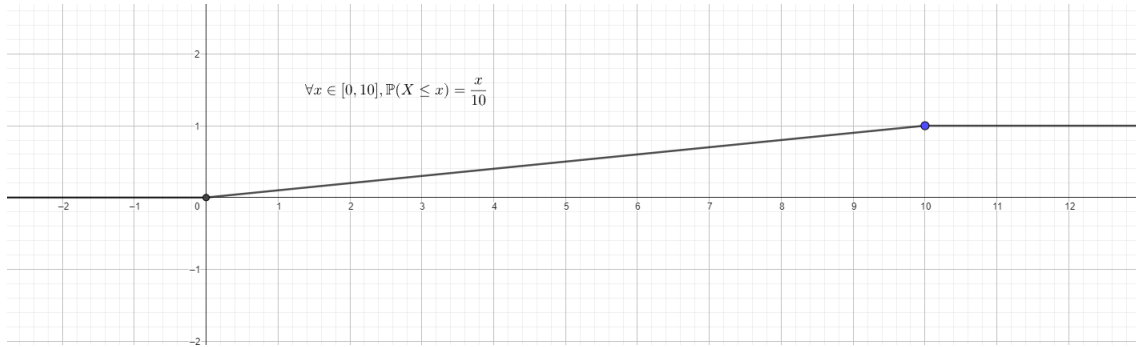
- (i) La probabilité que le bus passe dans exactement  $\pi$  minutes est nulle. En effet, avoir un temps d'attente "exactement égal à  $\pi$ " est un événement bien trop improbable. Pour être exacte, il faudrait que l'infinité des décimales de notre chronomètre soient celles de  $\pi$ ...
- (ii) Ce raisonnement s'applique en fait à tout réel de  $[0, 10]$ ,  $\pi$  n'a rien de particulier. La loi de  $X$  est **sans atome**.
- (iii) D'ailleurs, notre chronomètre n'aurait pas la précision requise pour savoir "toutes les décimales" de ce temps (qui commencent à être bien théoriques...). Par contre, on pourra facilement mesurer si le bus est passé entre la seconde 357 et la seconde 358. Ainsi, naturellement, on s'intéresse à des probabilités du type  $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ .
- (iv) On voit alors comment modéliser le problème à l'aide du point  $\beta$ ) ci-dessus : on voudrait avoir  $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 5) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 8) = \frac{1}{10}$ ... Ce qui se généralise par :

$$\forall (a, b) \in [0, 10]^2, a \leq b \implies \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \frac{b - a}{10}.$$

Autrement dit, la probabilité de voir le bus arriver entre la minute  $a$  et la minute  $b$  est exactement la proportion occupée par  $[a, b]$  dans  $[0, 10]$ .

On dira que  $X$  suit la loi **uniforme** sur  $[0, 10]$ .

Voici la fonction de répartition de cette variable aléatoire réelle.



**Remarque.** On retiendra bien:

- (i) La continuité de cette fonction de répartition  $F_X$  traduit le caractère **sans atome** de la loi de  $X$ .
- (ii) Les variables aléatoires réelles dont la loi est sans atome sont étudiées à travers leurs fonctions de répartition, leur loi étant la fonction nulle. La loi de probabilité est un bon outil pour les variables aléatoires **discrètes**, la fonction de répartition est le bon outil pour les variables aléatoires **à densité**.
- (iii) La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète a le profil "en escalier" observé ci-dessus.

On concrétise tout ça dans l'énoncé suivant :

**Proposition 10.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, et  $x$  un réel. Alors, il est équivalent de dire :

- (i) La fonction de répartition  $F_X$  de  $X$  est continue en  $x$ , et
- (ii)  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ .

En particulier,  $F_X$  est continue si, et seulement si, la loi de  $X$  est sans atome.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

Avant de passer à la définition des variables aléatoires à densité, on aura besoin de l'énoncé suivant, car on va maintenant couramment introduire des variables aléatoires réelles en donnant leur fonction de répartition.

**Proposition 11. Caractérisation des fonctions de répartition**

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. On suppose que :

- (i)  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ ,
- (ii)  $F$  est continue à droite en tout point de  $\mathbb{R}$ ,
- (iii)  $F$  admet 0 pour limite en  $-\infty$  et 1 pour limite en  $+\infty$ .

Alors,  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Autrement dit, il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et une variable aléatoire réelle  $X$  sur cet espace, telle que  $F = F_X$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 12. et méthode :** On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{20} & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

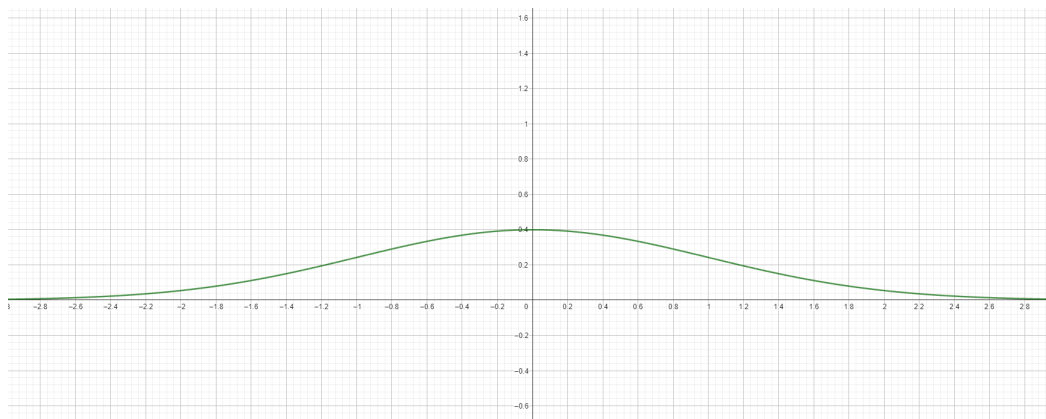
- (i) Tracer l'allure de  $F$ . Montrer que  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle  $X$ .
- (ii) Donner les atomes de la loi de  $X$ . Imaginer un "genre" de protocole pouvant donner une loi de ce type.

Dans cet exemple,  $X$  n'est ni à densité, ni discrète (ça existe !).

### 3. Variable aléatoire à densité

Certaines variables aléatoires sans atome sont appelées variables aléatoires à densité. Il s'agit des variables aléatoires réelles dont la fonction de répartition se calcule comme des intégrales de fonctions. Cette fonction "intégrande" sera naturellement continue par morceaux, et appelée densité.

Un premier exemple avec une variable aléatoire discrète  $X$  suivant la loi Gaussienne centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Sa fonction de densité sera la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_X : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .



On remarque que  $f_X$  est positive, et on admet que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$  converge et vaut 1. Voici alors le lien entre  $f_X$  et  $F_X$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt.$$

Autrement dit :

(i) L'aire totale sous la courbe de  $f_X$  vaut 1,

(ii) La probabilité que  $X$  soit inférieur ou égal à  $x$  est l'aire  $\int_{-\infty}^x f_X(t)dt$  sous la courbe de  $f_X$  jusqu'à  $x$  (partant de  $-\infty$ ).

Cette notion est intéressante, car elle regroupe beaucoup de lois classiques, naturelles "à juste titre", et permet d'utiliser le calcul intégral pour résoudre des problèmes.

**Définition 13.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

On dit que  $X$  est une variable aléatoire **à densité** si sa fonction de répartition  $F_X$  vérifie :

(i)  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et

(ii)  $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points.

**Définition 14.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est **une densité de  $X$**  si :

(i)  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$

(ii) il existe une partie finie de  $\mathbb{R}$ ,  $E$ , éventuellement égale à  $\emptyset$ , telle que :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus E, F_X'(x) = f(x)$

On note souvent  $f_X$  une densité de  $X$ .

**Remarque.** On dit que  $f_X$  est **une** densité de  $X$  : en effet, il existe plusieurs densités pour  $X$  lorsqu'il en existe une. Une raison à cela est que l'on peut donner des valeurs positives arbitraires à une densité sur l'ensemble  $E$  dans la définition ci-dessus.

**Proposition 15.** Soit  $X$  une variable aléatoire.

On suppose que  $X$  est à densité. Alors  $X$  admet une densité.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 16. Méthode :** Pour vérifier si une variable aléatoire réelle  $X$  donnée par sa fonction de répartition  $F_X$  est à densité, on utilise la proposition 13 ci-dessus. On vérifie donc si :

- (i)  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et
- (ii)  $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points.

avant d'appliquer les théorèmes ci-dessus.

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que pour tout réel  $x$ ,  $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$ .

Montrer que  $X$  est à densité et donner une densité de  $X$ .

**Exercice 17.** Pour vérifier si une fonction  $F$  donnée est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, on procède en deux temps.

- (i) On vérifie si  $F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle (**quelconque**) à l'aide de la méthode vue pour la proposition 11. Si c'est le cas, on a démontré l'existence d'une variable aléatoire  $X$  dont  $F$  est la fonction de répartition.

- (ii) On vérifie si  $X$  est à densité en se ramenant à la méthode de l'exemple 18 ci-dessus.

Montrons par exemple que la fonction  $F$  donnée sur  $\mathbb{R}$  par  $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \frac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et donner sa densité.

**Proposition 18.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité. Soit  $f_X$  une densité de  $X$ . Alors :

- (i)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points,
- (ii) L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  converge et vaut 1.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Proposition 19. (et définition)** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- (i)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points,
- (ii)  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ ,
- (iii) L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  converge et vaut 1.

Alors, il existe une variable aléatoire  $X$  à densité (définie sur un espace probabilisé) dont  $f$  est une densité. On dit alors que  $f$  est une densité de probabilité

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 20. Méthode :** Pour vérifier si une fonction donnée est une densité pour une variable aléatoire réelle à densité, autrement dit pour vérifier si cette fonction est une densité de probabilité, on utilise directement la proposition 19.

Montrons par exemple que  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{cases}$  est une densité de probabilité.

**Proposition 21.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité. Soit  $f_X$  une densité de  $X$ . Alors :

Pour tout réel  $a$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^a f_X(t)dt$  converge et  $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)dt$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Exemple 22. Méthode :** Reprenons l'exemple 20. Pour déterminer la fonction de répartition associée à une densité de probabilité, on se ramène à un calcul d'intégrale. Déterminons la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction  $f$  de l'exemple précédent.

Une conséquence immédiate de Chasles :

**Proposition 23.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité,  $f_X$  une densité de  $X$  et  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Alors :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

#### 4. Une particularité des lois sans atome

On rappelle que si  $X$  est une variable aléatoire réelle,

- (i) On dit que la loi de  $X$  est sans atome, ou diffuse, si  $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) = 0$ .
- (ii) Si  $X$  est à densité, alors la loi de  $X$  est sans atome.

Une conséquence importante pour tous les calculs avec des variables à densité :

**Proposition 24.** Soit  $X$  est une variable aléatoire à densité. Alors pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

(i)

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b),$$

(ii)

$$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a),$$

(iii)

$$\mathbb{P}(X > b) = \mathbb{P}(X \geq b).$$

**Démonstration.** En effet,  $[a \leq X \leq b] = [X = a] \cup [a < X \leq b]$  et cette réunion est disjointe, donc:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

car la loi de  $X$  est sans atome. Les autres égalités se démontrent de la même manière.  $\square$

#### 5. Transformations de variables aléatoires à densité

L'idée est la suivante : on se donne une variable aléatoire à densité  $X$ , et on définit une nouvelle variable aléatoire  $Y$  de la forme  $Y = g(X)$ , avec  $g$  une fonction réelle.  $Y$  est-elle à densité? Peut-on donner sa fonction de répartition et/ou une densité de probabilité pour  $Y$ ?

Voyons un premier exemple.

**Exemple 25.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  suivant la loi uniforme sur  $[1, 3]$ . Plus précisément,  $X$  est à densité, sa fonction de répartition étant donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On pose  $Y = 2X + 1$ . Montrons que  $Y$  est à densité.

*Idée à retenir : on passe par la fonction de répartition, et on relie  $F_Y$  à  $F_X$ .*

Déterminons la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$ . Pour tout réel  $t$ , par définition,  $F_Y(t) = \mathbb{P}([Y \leq t])$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$Y(\omega) \leq t \iff 2X(\omega) + 1 \leq t \iff X(\omega) \leq \frac{t-1}{2}$$

Ainsi,  $[Y \leq t] = [X \leq \frac{t-1}{2}]$ . Par conséquent :  $F_Y(t) = F_X(\frac{t-1}{2})$ .

*Pour finir de donner  $F_Y$ , il faut voir ce que donne les conditions présentes dans la définition de  $F_X$ .*

Or, on a les chaînes d'équivalence :

$$1 \leq \frac{t-1}{2} \leq 3 \iff 2 \leq t-1 \leq 6 \iff 3 \leq t \leq 7$$

et

$$\frac{t-1}{2} < 1 \iff t < 3$$

Finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_Y(t) = F_X(\frac{t-1}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3 \\ \frac{1}{2}(\frac{t-1}{2} - 1) = \frac{1}{4}(t-3) & \text{si } 3 \leq t \leq 7 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On reconnaît (cf plus bas) la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[3, 7]$ , donc  $Y$  est à densité, et suit la loi uniforme sur  $[3, 7]$ .

**Exemple 26.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité de fonction de répartition donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{sinon} \end{cases} .$$

*On dira que  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre 1.*

On pose  $Y = 1 - X$ . Montrer que  $Y$  est à densité, et donner sa fonction de répartition.

**Exemple 27.** Même question avec la variable aléatoire  $Y$  donnée par  $Y = e^X - 1$ .

Un dernier cas, où il faut faire plus attention : quand la "fonction  $g$ " n'est pas bijective.

**Exemple 28.** Soit  $X$  qui suit la loi uniforme sur  $[-1, 1]$ . Sa fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } -1 \leq X \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Donner la fonction de répartition de la variable  $Y$  donnée par  $Y = X^2 + 1$ .  $Y$  est-elle à densité ?

## II. Espérance, variance, moments et transfert

On retrouve les mêmes notions que pour les variables aléatoires discrètes. On pourra constater les similarités avec celles-ci, le symbole  $\sum$  étant "remplacé" par  $\int$ .

**Définition 29.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, et  $f_X$  une densité de  $X$ . On dit que  $X$  admet une espérance si l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

*converge absolument.*

Dans ce cas, on appelle espérance de  $X$  le réel noté  $E(X)$  donné par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

On remarquera que l'intégrale impropre considérée doit converger absolument, et on admet que cette définition ne dépend pas de la densité  $f_X$  de  $X$  choisie. On a également la propriété de linéarité de l'espérance, pas donnée dans ce cours.

Pour continuer, voici le théorème de transfert pour les variables à densité:

**Proposition 30.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, et  $f_X$  une densité de  $X$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Supposons que  $g(X)$  soit une variable à densité. Alors,  $t \mapsto g(t)f_X(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  privé d'un nombre fini (éventuellement nul) de points, et il est équivalent de dire :

(i)  $g(X)$  admet une espérance, et

(ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t) dt$  converge absolument.

Dans ce cas,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t) dt.$$

**Définition 31.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité. On dit que  $X$  admet une variance si :

(i)  $X$  admet une espérance, et

(ii)  $(X - E(X))^2$  admet une espérance.

Dans ce cas, on appelle variance de  $X$  le réel  $V(X)$  donné par :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

**Remarque.** On admet que cette définition est bien posée : si  $X$  est à densité et admet une espérance, alors  $(X - E(X))^2$  est une variable aléatoire à densité.

**Remarque.** Pour Koenig-Huygens, on admet également que si  $X$  est à densité, alors  $X^2$  l'est aussi.

Voici la version "variables aléatoires à densité" de Koenig-Huygens.

**Proposition 32.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité. Il est équivalent de dire :

(i)  $X$  admet une variance, et

(ii)  $X^2$  admet une espérance.

Dans ce cas,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

On doit donc, pour la variance, considérer les éventuelles espérances de  $X$  et  $X^2$ . Voici une définition plus générale.

**Définition 33.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité, et  $f_X$  une densité de  $X$ . Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $r$  si la variable aléatoire  $X^r$  admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre  $r$  de  $X$  le réel :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt.$$

**Remarque.** Des affirmations se sont glissées dans la définition ("et proposition", donc) ci-dessus. Premièrement, on peut montrer que si  $X$  est à densité, alors  $X^r$  est à densité pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ . Deuxièmement, le second point de la définition est une conséquence du théorème de transfert.

**Remarque.** On pourrait montrer que si une variable à densité  $X$  admet un moment d'ordre  $r$ , alors elle admet des moments d'ordre  $r'$  pour tout  $r' \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

### III. Lois à densité usuelles

#### 1. Loi uniforme sur un segment.

**Proposition 34.** Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$ .

Alors, la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de probabilité.

**Démonstration.** En exercice.  $\square$

**Définition 35.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, et  $a, b$  deux réels tels que  $a < b$ . On dit que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$ , et on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$$

si  $X$  est à densité, et admet pour densité de probabilité la fonction :

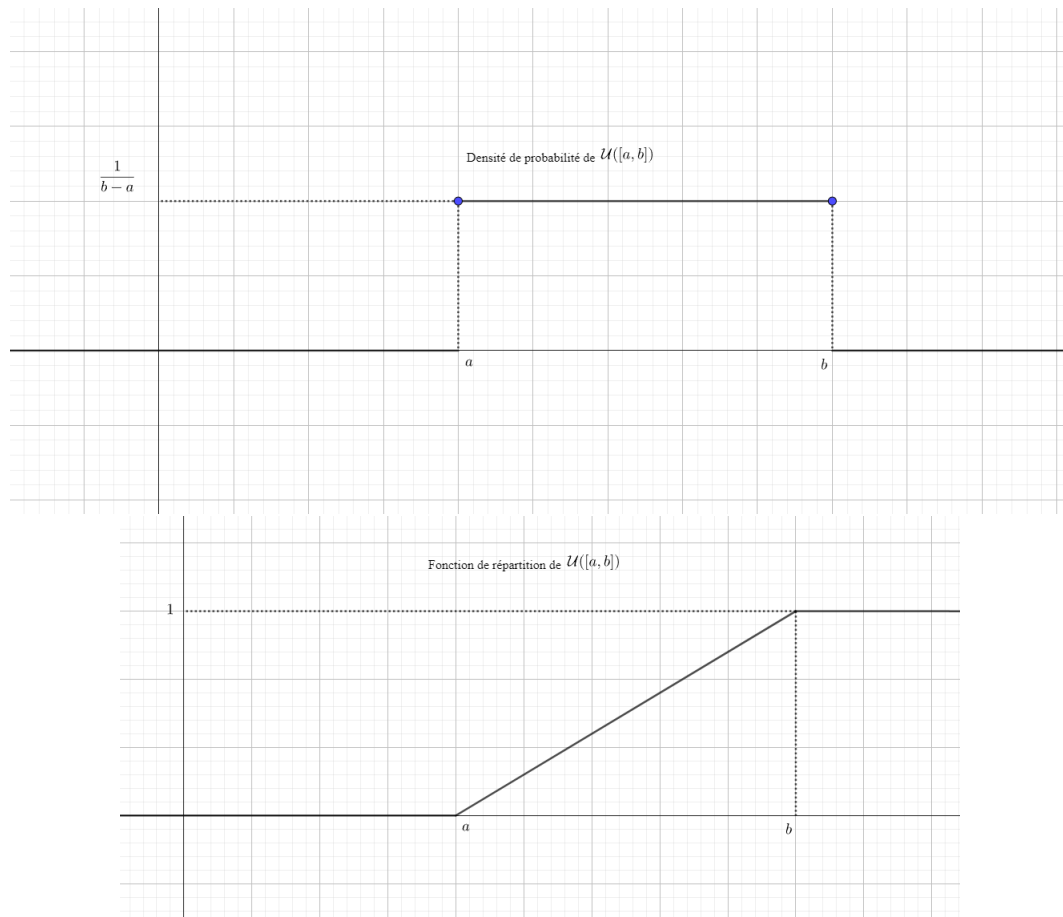
$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 36.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ , avec  $a < b$  deux réels. Alors, la fonction de répartition de  $X$  est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{1}{b-a}(t-a) & \text{si } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

**Démonstration.** En exercice.  $\square$

**Remarque.** Cela caractérise bien sur les variables aléatoires suivant une loi uniforme sur un segment.



**Remarque.** On peut retenir ces formules sans trop d'efforts. Si  $X \leftrightarrow \mathcal{U}([a, b])$  :

- (i) "Sa" densité de probabilité  $f_X$  est nulle hors de  $[a, b]$  et constante sur  $[a, b]$ . Cela revient à dire que  $X$  accorde le même "poids" à chaque réel de  $[a, b]$ , et un poids nul en dehors ( $X$  est "à valeurs" dans  $[a, b]$ ).
- (ii) La valeur de cette constante est la seule possible pour avoir une aire de 1 (aire d'un rectangle).

Pour la fonction de répartition :

- (i) Cette fonction est nulle avant  $a$ , constante égale à 1 après  $b$ . Cela provient du fait que  $X$  est "à valeurs" dans  $[a, b]$ . Cette fonction est affine entre  $a$  et  $b$ .
- (ii) La pente de cette fonction est  $\frac{1}{b-a}$ , car affine, et augmente de 1 sur un intervalle de longueur  $b-a$ . Cette fonction est nulle en  $a$ , d'où la formule affine  $F_X(t) = \frac{1}{b-a}(t-a)$  pour  $t \in [a, b]$ .

**Proposition 37.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X \leftrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ . Alors,  $X$  admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

## 2. Loi exponentielle

**Proposition 38.** Soit  $\lambda > 0$  un réel. Alors, la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$  est une densité de probabilité.

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Définition 39.** Soit  $\lambda$  un réel strictement positif, et  $X$  une variable aléatoire réelle. On dit que  $X$  suit la **loi exponentielle de paramètre  $\lambda$** , et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

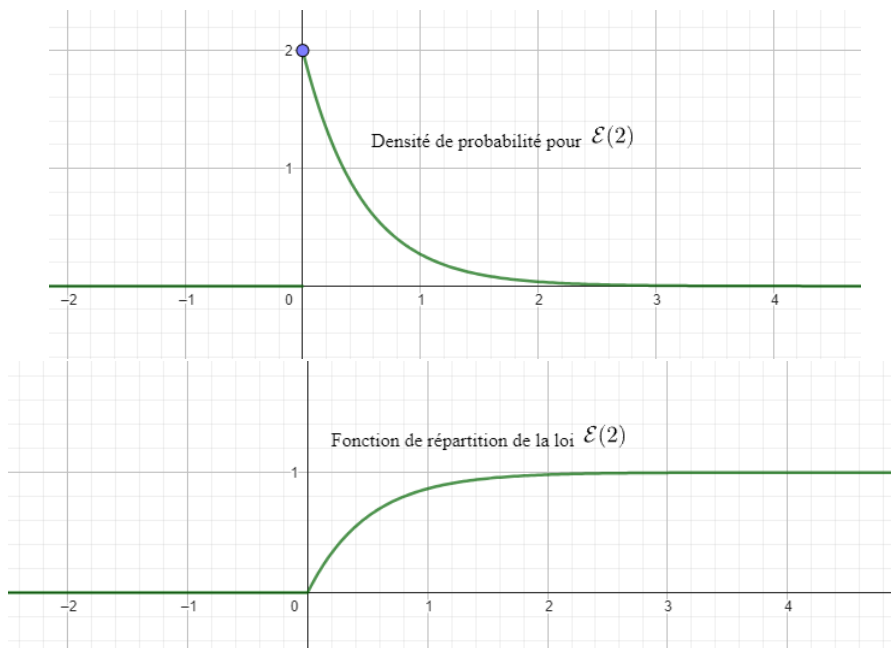
si  $X$  est une variable aléatoire à densité, et qu'une densité de  $X$  est donnée par :

$$f_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{cases} .$$

**Proposition 40.** Soit  $\lambda > 0$  et  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ . Alors, la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$  est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$



**Remarque.** Pour retrouver cette densité de probabilité pour une variable  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ , on retiendra qu'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est "à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ " (dont sa densité est nulle sur  $\mathbb{R}_-$ ), et que sur  $\mathbb{R}_+$ , cette densité est une exponentielle décroissante type  $t \mapsto e^{-\lambda t}$ . Le facteur multiplicatif permettant de retrouver  $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$  est le seul facteur multiplicatif qu'on peut mettre pour avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$$

car  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}$  (calcul à savoir refaire de tête ou en une ligne).

**Proposition 41.** Soit  $\lambda$  un réel strictement positif, et  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ . Alors,  $X$  admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Remarque.** Il y a plus de choses à dire sur les lois exponentielles : ce sont les lois à densité sans mémoire (voir 2A). Elles apparaissent spontanément dans nombreux phénomènes physiques. Par exemple, elles modélisent bien le comportement de la radioactivité, ou la durée de vie d'un composant (informatique par exemple) qui a deux états (fonctionnel ou cassé). Le caractère "sans mémoire" traduit le fait suivant : un atome (resp. un composant) qui ne s'est pas désintégré ces 3000 dernières années a "la même chance" de se désintégrer aujourd'hui qu'il y a 3000 ans (il n'y a pas d'effet d'usure).

### 3. Loi normale

La loi normale, ou loi gaussienne, est la plus célèbre des lois à densité. Elle apparaît spontanément dans de nombreux phénomènes probabiliste, notamment avec le théorème central limite vu en 2A. C'est une des raisons pour laquelle elle intéresse tant les mathématiciens.

**Proposition 42. (Admise.)** L'intégrale doublement impropre  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$$

**Proposition 43.** Soit  $m$  un réel et  $\sigma$  un réel strictement positif. Alors, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

est une densité de probabilité.

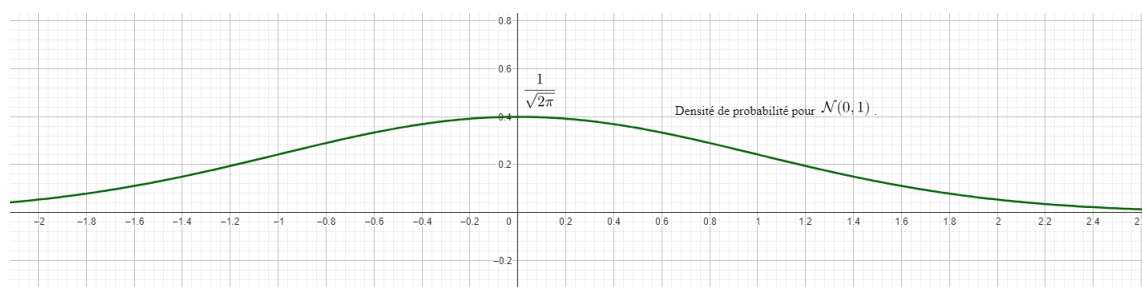
**Démonstration.** À noter.  $\square$

**Définition 44.** Soit  $m$  un réel et  $\sigma$  un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit la **loi normale de paramètre**  $(m, \sigma)$ , et on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$$

si  $X$  est à densité, et admet pour densité de probabilité la fonction réelle donnée par :

$$f_X : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$



Cette fois-ci, on ne peut pas donner de formule plus simple, pour la fonction de répartition d'une telle variable aléatoire  $X$ , que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) dx.$$

Alors, on procède autrement. On nomme  $\Phi$  la fonction de répartition obtenue pour la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0,1)$ . Admettons pour cette année le point suivant :

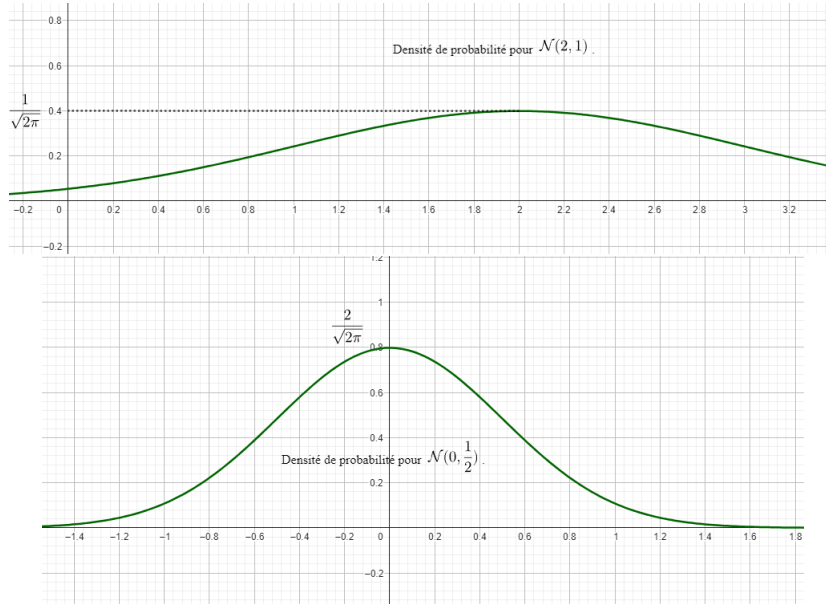
**Proposition 45.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ , où  $m$  et  $\sigma$  sont des réels tels que  $\sigma > 0$ . Alors,  $X$  admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

On retiendra que  $\sigma$  est donc l'écart-type de  $X$ .

**Remarque.** En particulier, si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $X$  est une variable aléatoire centrée réduite (espérance nulle, variance 1).

On peut voir l'effet des paramètres  $m$  et  $\sigma$  sur la densité de probabilité.



Plus l'écart-type  $\sigma$  est faible, plus la bosse est "resserrée", c'est-à-dire plus la probabilité d'être proche de la moyenne est grande, ce qui est cohérent. La moyenne  $m$  est l'abscisse du sommet de la bosse.

Revenons à nos problèmes de fonction de répartition. Tout se base sur le fait suivant, utilisé constamment pour travailler avec les lois normales.

**Proposition 46. (Normalisation d'une variable aléatoire suivant une loi normale)** Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ , alors  $\frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Démonstration.** À noter.  $\square$

Pour travailler avec les lois normales, pour tous les problèmes liés aux fonctions de répartition :

- (i) On nomme  $\Phi$  la fonction de répartition obtenue pour la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$  (notation classique),
- (ii) On étudie  $\Phi$ , par exemple en dressant une table de ses valeurs,
- (iii) Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ , alors on ramène l'étude de  $F_X$  à celle de  $\Phi$  à l'aide de la proposition précédente (la normalisation).

**Exemple 47.** Soit  $X$  une variable aléatoire à densité suivant la loi normale de paramètre  $(-1, 3)$ . On pose  $Y = \frac{X + 1}{3}$ . On sait que  $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  (on dit qu'on normalise la variable aléatoire  $X$ ). Exprimer  $F_X$  en fonction de  $\Phi$ .