

## Devoir surveillé n°8

Devoir du **lundi 1er juin 2026**.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit.

Consignes de présentation : Écrire avec une encre bleue sombre ou noire. Encadrer les résultats. Ne pas utiliser la couleur rouge. Écrire de façon lisible. Éviter les ratures. **Utiliser une règle.**

Consignes de rédaction : Rédiger les raisonnements en français, dans une langue correcte et soignée, sans utiliser d'abréviation.

On rappelle que le connecteur  $\implies$  ne peut pas être utilisé comme synonyme de "donc".

Dans ce sujet, on admettra le résultat suivant :

**Théorème 1. (Continuité croissante de la probabilité)**

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'événements croissante au sens de l'inclusion. Alors, la suite  $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

### Exercice 1

Dans tout l'exercice,  $p$  désigne un réel de  $]0, 1[$  et on pose  $q = 1 - p$ .

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

On considère en particulier une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = k]) = q^k p = (1 - p)^k p$$

#### Partie A :

1. Montrer que la variable aléatoire  $Y = X + 1$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire que  $X$  admet une espérance et une variance, et préciser  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .
3. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée le réel  $p$ , elle renvoie une simulation de la variable aléatoire  $X$ .

```
1 import numpy.random as rd
2 def simule_X(p) :
3     Y = .....
4     while .....
5         Y = Y + 1
6     X = Y - 1
7     return X
```

#### Partie B :

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre  $k$  de jetons de son choix ( $k \in \mathbb{N}$ ), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si  $k$  est égal à zéro, alors la machine ne renverse aucun jeton au joueur ;
- si  $k$  un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit  $k$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$ , toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire  $X$  étudiée dans la partie A, et reverse au joueur  $(X_1 + \dots + X_k)$  jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à  $p$  pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.

Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, à chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $Z_n$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après  $n$  activations de la machine.

On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi  $Z_0 = 1$ .

On remarque en particulier que  $Z_1$  suit la même loi que  $X$ .

4. Recopier et compléter la fonction suivante afin que, prenant en entrée un entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  et le réel  $p$ , elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de  $Z_n$ .  
 Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```

1      import numpy.random as rd
2      def simule_Z(n,p) :
3          Z = 1
4          for i in range(n) :
5              s = 0
6              for j in range(1,Z) :
7                  .....
8              .....
9          return Z
    
```

On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après  $n$  activations de la machine ; ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}([Z_n = 0])$ .

On note également  $R$  l'événement : " le joueur finit par ne plus avoir de jeton ".

5. (a) Préciser les valeurs de  $u_0$  et de  $u_1$ .  
 (b) Comparer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , les événements  $[Z_n = 0]$  et  $[Z_{n+1} = 0]$ .  
 En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

6. Justifier :  $\mathbb{P}(R) = \ell$   
 7. (a) Montrer que, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_2 = 0]) = (u_1)^k$ .

On **admet** que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1} = 0]) = (u_n)^k$ .

- (b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z_1 = k])(u_n)^k = \frac{p}{1 - qu_n}$ .  
 8. (a) Montrer que  $\ell$  vérifie :  $(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$ .  
 (b) On suppose  $p \geq \frac{1}{2}$ . Montrer :  $\mathbb{P}(R) = 1$ .  
 (c) On suppose  $p < \frac{1}{2}$ . Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$ . En déduire :  $\mathbb{P}(R) < 1$ .  
 (d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir  $p$  dans l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

**Partie C :**

On suppose à présent que  $p \geq \frac{1}{2}$ .

Le casino cherche la valeur à donner à  $p$  pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.

On note  $T$  la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n = 1 - u_n$ .

9. Justifier :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}([T \leq n])$  puis  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([T = n]) = v_{n-1} - v_n$ .

10. Montrer, pour tout  $N$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $\sum_{n=1}^N n\mathbb{P}([T = n]) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N$ .

11. On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ .

(a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$ .

(b) En déduire que la variable aléatoire  $T$  n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant que  $p > \frac{1}{2}$ .

On pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $w_n = \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$ .

(a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$ .

(b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$ , puis :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$ .

(c) Montrer que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance et que l'on a :  $\mathbb{E}(T) \leq \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}$ .

13. Quelle(s) valeur(s) de  $p$  recommanderiez-vous au casino ?

— *Fin de l'énoncé* —