Correction du DS n°8

Exercice 1 *EMLYON 2022*

Partie A :

1. D'après l'énoncé $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Y(\Omega) = \{k+1\,;\, k \in X(\Omega)\} = \{k+1\,;\, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X+1 = k) = \mathbb{P}(X = k-1) \underset{(1)}{=} (1-p)^{k-1}p$$

(1) : d'après l'énoncé car $k-1 \in \mathbb{N}$
Comme $p \in]0,1[$, on en déduit alors que $\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$

2. Y admet donc une espérance et une variance et $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}[Y] = \dfrac{1-p}{p^2}$.
Or, $X = Y - 1$ donc par linéarité, $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

De plus, X étant une transformation affine de Y, $\boxed{X \text{ admet une variance}}$ et

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = \frac{1-p}{p^2}$$

3.

```python
    import numpy.random as rd
    def simule_X(p) :
        Y = 1
        while rd.random() < 1-p :
            Y = Y + 1
        X = Y - 1
        return X
```

Partie B :

4.

```python
    import numpy.random as rd
        def simule_Z(n,p) :
        Z = 1
        for i in range(n) :
            s = 0
            for j in range (1,Z) :
                s = s + simule_X(p)
            Z = s
        return Z
```

5. (*a*) D'après l'énoncé, $Z_0 = 1$ donc l'événement $(Z_0 = 0)$ est impossible donc $\boxed{u_0 = 0}$.
Toujours d'après l'énoncé, Z_1 et X ont la même loi donc $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^0 p = p$ d'où $\boxed{u_1 = p}$.

(*b*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si l'événement $(Z_n = 0)$ est réalisé alors le joueur ne dispose plus d'aucun jeton après n activations de la machine. Lors de la prochaine activation, la machine ne reversera aucun jeton au joueur donc il ne disposera d'aucun jeton après $n+1$ activations de la machine.
Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)}$$

Par croissance de la probabilité,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0)$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$
Une probabilité est un réel plus petit que 1 donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

6. Le joueur finit par ne plus avoir de jeton s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le joueur ne dispose plus de jeton après n activations. Ainsi :

$$\boxed{R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0)}$$

La suite $((Z_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on en déduit par continuité croissante de la probabilité que :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

7. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'événement $(Z_1 = k)$ soit réalisé. Le joueur dispose donc de k jetons après la première partie. Comme l'indique l'énoncé, on considère alors k variables aléatoires $X_1, \dots,$ X_k mutuellement indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X tels que le nombre de jetons reversés au joueur après la deuxième partie soit $X_1 + \dots + X_k$. Ces variables aléatoires étant à valeurs dans N, on en déduit que

$$X_1 + \dots + X_k = 0 \iff X_1 = \dots = X_k = 0$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 + \dots X_k = 0) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_k = 0))$$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi que X, ainsi

$$\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_j = 0) = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0)^k$$

D'après la question 5.a, $P(X = 0) = p = u_1$, donc il vient

$$\boxed{\mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = (u_1)^k}$$

Cette formule reste valide pour $k = 0$ car si le joueur ne dispose plus de jeton après la 1ère activation, il n'en aura plus non plus après la deuxième activation.

(b) Fixons $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que Z_1 suit la même loi que X. En particulier $Z_1(\Omega) = N$ donc les événements $((Z_1 = k))_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z_1 = k) = \mathbb{P}(X = k) = q^k p \neq 0$
D'après la formule des probabilités totales, la série $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_1 = k) \times \mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0)$ converge et on a

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) \times \mathbb{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0)$$

D'après le point admis :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)(u_n)^k}$$

Comme X et Z_1 suivent la même loi, on a

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)(u_n)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p (u_n)^k \underset{(1)}{=} p \times \sum_{k=0}^{+\infty} (q u_n)^k$$

(1) : par linéarité de la somme
Comme $q \in [0, 1[$ et $u_n \in [0, 1]$, on a $qu_n \in [0, 1[$. Ainsi, on reconnaît une somme géométrique de raison dans $]-1, 1[$ et alors

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{p}{1 - qu_n}}$$

8. (*a*) D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(1-qu_n) = p$$

D'une part, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc par combinaison linéaire, $1-qu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-q\ell$
D'autre part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Ainsi, par produit, $u_{n+1}(1-qu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-q\ell)$.
Par unicité de la limite, on obtient $\ell(1-q\ell) = p$. Il vient $q\ell^2 - \ell + p = 0$
Or, 1 est une racine évidente du polynôme $qX^2 - X + p$ puisque $p+q=1$. D'après les relations coefficients-racines, la deuxième racine de ce polynôme est $\frac{p}{q}$ donc

$$qX^2 - X + p = q(X-1)(X-\frac{p}{q}) = (X-1)(qX-p)$$

Finalement, $\boxed{\ell \text{ vérifie } (\ell-1)(q\ell-p)=0}$

(*b*) D'après la question précédente $(\ell-1)(q\ell-p)=0$ donc $\ell=0$ ou $q\ell-p=0$. Or,

$$q\ell - p = 0 \iff \ell = \frac{p}{q}$$

Ainsi, $\ell = 1$ ou $\ell = \frac{p}{q}$.
Comme $p \geq \frac{1}{2}$, on a $q = 1-p \leq \frac{1}{2} \leq p$. Par conséquent, $\frac{p}{q} \geq 1$.
On en déduit que, dans tous les cas, $\ell \geq 1$.
Toutefois, ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est majorée par 1 donc par préservation des inégalités larges par passage à la limite $\ell \leq 1$.
Finalement, on obtient $\ell = 1$. Par la question 6, $\boxed{\mathbb{P}(R) = 1}$

(*c*) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H(n)$: "$u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$"
- <u>Initialisation :</u> $u_0 = 0$ donc $H(0)$ est vraie d'où l'initialisation.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$. D'après la question 7.*b*, on a $u_{n+1} = \dfrac{p}{1-qu_n}$ et d'après $H(n)$, on a $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$ Ainsi,

$$0 \leq u_n \leq \frac{p}{q}$$

D'où

$$0 \geq -qu_n \geq -p$$

Puis

$$1 \geq 1-qu_n \geq 1-p$$

Par croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $q = 1-p$

$$1 \leq \frac{1}{1-qu_n} \leq \frac{1}{q}$$

Et enfin

$$0 \leq p \leq \frac{p}{1-qu_n} \leq \frac{p}{q}$$

On a donc $u_{n+1} \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.

- <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]}$

Par préservation des inégalités larges par passage à la limite, $\ell \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$.

Or, $p < \dfrac{1}{2}$ donc $q = 1-p > \dfrac{1}{2} = p$ puis $\dfrac{p}{q} < 1$. Ainsi, $\ell < 1$.

De plus, d'après la question 8.*a*, $\ell = 1$ ou $\ell = \dfrac{p}{q}$. Par conséquent, $\ell = \dfrac{p}{q}$.

Il vient par la question 6, $\boxed{\mathbb{P}(R) = \frac{p}{q} < 1}$

(*d*) Le casino préféra avoir $\mathbb{P}(R) = 1$ afin que, presque-sûrement, le joueur finisse par ne plus avoir de jeton. C'est pourquoi, $\boxed{\text{il est préférable pour le casino de choisir } p \text{ dans l'intervalle } \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(Z_n = 0)$ signifie que le joueur ne disposait plus de jetons après la n-ième activation. Deux possibilités : ou bien il a perdu tous ses jetons à la n-ième activation ou bien il les avait perdus à une activation précédente (et activait la machine sans jeton ensuite). Dans tous les cas, cela signifie que le nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton est inférieur ou égal à n. Cela correspond à l'événement $(T \leq n)$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (Z_n = 0) = (T \leq n)$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(T \leq n)}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a la réunion disjointe suivante :

$$(T \leq n) = (T \leq n-1) \sqcup (T = n)$$

D'où

$$\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T \leq n-1)$$

et avec le point précédent,

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \leq n) - \mathbb{P}(T \leq n-1) = u_n - u_{n-1} = 1 - u_{n-1} - (1 - u_n) = v_{n-1} - v_n$$

Il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n}$$

10. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1} - v_n) = \sum_{n=1}^{N} nv_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nv_n$$

En procédant au changement d'indice $k = n - 1$ dans la première somme, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)v_k - \sum_{n=1}^{N} nv_n = \sum_{k=0}^{N-1} kv_k + \sum_{k=0}^{N-1} v_k - \sum_{n=1}^{N} nv_n$$

Par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=0}^{N-1} kv_k - \sum_{n=1}^{N} nv_n = -Nv_N$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{k=0}^{N-1} v_k - Nv_N}$$

11. (*a*) On utilise la relation de récurrence de la question 7.*b*. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}u_n} = \frac{1}{2 - u_n}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H(n)$: "$u_n = \dfrac{n}{n+1}$"

- <u>Initialisation :</u> $u_0 = 0 = \dfrac{0}{0+1}$ donc $H(0)$ est vraie d'où l'initialisation.
- <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ et montrons $H(n+1)$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \dfrac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2-n} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ce qui montre $H(n+1)$ et achève l'hérédité.

- <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_n = \dfrac{n}{n+1}}$

(*b*) Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

D'après la question 10, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} \underset{(1)}{==} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{N}{N+1}$$

(1) avec le changement d'indice $k = n+1$.

Or, la série harmonique diverge donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

De plus, $\dfrac{N}{N+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$

Par somme,

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T=n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(T=n)$ diverge donc $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

12. (*a*) En utilisant la question 7.*b*, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \frac{1 - \dfrac{p}{1-qu_n}}{\dfrac{p}{q} - \dfrac{p}{1-qu_n}} = \frac{1-qu_n-p}{\frac{p}{q}(1-qu_n)-p} = \frac{q-qu_n}{\frac{p-qp}{q} - pu_n} = \frac{q}{p}\frac{1-u_n}{\frac{1-q}{q} - pu_n} = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q} - pu_n} = \frac{q}{p}w_n$$

(*b*) Avec la question précédente, on obtient que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une géométrique de raison $\frac{q}{p}$ et de premier terme

$$w_0 = \frac{1-u_0}{\frac{p}{q}-u_0} = \frac{1-0}{\frac{p}{q}-0} = \frac{q}{p}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{q}{p} \times \left(\frac{q}{p}\right)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} \iff (\frac{p}{q} - u_n)w_n = 1-u_n \iff u_n(1-w_n) = 1 - \frac{p}{q}w_n \underset{(1)}{\iff} u_n = \frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}$$

(1) : comme $p > \frac{1}{2}$, on a $0 < q < \frac{1}{2} < p$ donc $\frac{q}{p} \in]0,1[$ et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \in]0,1[$ d'où $1 - w_n > 0$

Par conséquent, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n} = \frac{1-\frac{p}{q}\times\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$$

D'une part, la suite géométrique $\left(\left(\frac{q}{p}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante car de raison $\frac{q}{p} \in]0,1[$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} < \left(\frac{q}{p}\right)^{n} \leq 1 \quad \text{d'où} \quad 1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} > 1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n} \geq 0 \quad \text{puis} \quad \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} < 1$$

On en déduit que $u_n \leq 1$ et $v_n = 1 - u_n \geq 0$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} < 1$ donc $0 < 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} < 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \geq 1$$

En multipliant par $1-\left(\frac{q}{p}\right)^n \geq 0$, on a

$$\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \geq 1-\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

d'où

$$u_n \geq 1-\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

puis

$$v_n = 1-u_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

Finalement, on a montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n}$$

(c) D'après la question 10, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T=n) = \sum_{k=0}^{N-1} v_k - Nv_N$$

D'une part, avec la question précédente, on a pur tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq v_N \leq \left(\frac{q}{p}\right)^N$$

d'où

$$0 \leq Nv_N \leq N\left(\frac{q}{p}\right)^N$$

Comme $\frac{q}{p} \in]0,1[$, par croissances comparées, $N\left(\frac{q}{p}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et alors par le théorème des gendarmes, $Nv_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$
D'autre part, étudions la convergence de la série de terme général v_n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n$
- Les séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{q}{p}\right)^n$ sont à termes positifs.
- La série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{q}{p}\right)^n$ est géométrique de raison $\frac{q}{p} \in]0,1[$ donc converge. Sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$
Par conséquent, par somme de limites,

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(T=n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(T=n)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$$

De plus, la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(T=n)$ étant à termes positifs, elle converge donc absolument.

Ainsi, $\boxed{T \text{ admet une espérance}}$ et

$$\boxed{\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(T=n) \leq \frac{1}{1-\frac{q}{p}}}$$

13. Pour que le joueur reste le plus longtemps possible dans le casino, il faut que $\mathbb{E}[T]$ soit maximal. Il faut donc maximaliser $\dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$, c'est-à-dire minimaliser $1-\frac{q}{p}$ et alors maximaliser $\frac{q}{p}$. Or,

$$\frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

Il faut donc maximaliser $\frac{1}{p}$ c'est-à-dire minimaliser p. Or, on a supposé que $p \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, nous pouvons recommander au casino de

$\boxed{\text{choisir } p = \frac{1}{2} \text{ pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.}}$