Chapitre 5 : Fonctions polynomiales

ECG1 A, Lycée Hoche

I. Fonction polynômiale, unicité des coefficients

1. Notion de fonction polynomiale

Définition 1. On appelle *fonction polynomiale*, ou *polynôme*, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

On note $\mathbb{R}[X]$ ou parfois $\mathbb{R}[x]$, l'ensemble des fonctions polynômiales.
Pour tous réels $a_0, \dots, a_n$ (où $n \in \mathbb{N}$), on notera $f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, ou encore $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, la fonction polynomiale f donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Remarque. On introduit ici implicitement une notation : la lettre X est un symbole appelé *l'indéterminée* permettant de définir des polynômes "sans quantifier". Par exemple, on peut écrire : " Soit f le polynôme $f(X) = 2X^2 + 5X + 1$ ", ou " Soit $f(X) = 2X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ " au lieu de "Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$".

Remarque. Il est toléré d'écrire "Soit $f(x) = 3x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ pour définir le polynôme $f(X) = 3X^2 + 1$, à condition que la variable x ne soit pas fixée avant, ce qui est souvent le cas. On évitera donc cette formule, et on évitera également de nommer une variable X, afin d'éviter toute confusion avec l'indéterminée de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2. (i) La fonction nulle $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}\right.$ est une fonction polynomiale, comme on peut le voir en posant $n = 0$ et $a_0 = 0$ selon les notations de la définition ci-dessus.

(ii) Une fonction affine est une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$, pour a et b réels. C'est une fonction polynomiale. Toute fonction constante est une fonction affine, donc un polynôme.

(iii) Les polynômes de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ sont appelés trinômes du second degré, ou fonction polynomiale de degré 2.

(iv) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{12} - 2x^6 + 1$ est polynomiale.

Définition 3. On appelle polynôme nul, et on note $0_{\mathbb{R}[X]}$, la fonction $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}\right.$.

Définition 4. On appelle monôme tout polynôme de la forme aX^k, avec $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Remarque. D'après la définition, deux polynômes f et g sont égaux si et seulement s'ils sont égaux en tant que fonction, i.e. ssi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x).$$

Remarque. On veut définir, par exemple, le degré d'une fonction polynomiale, la notion de coefficient, dont vous avez déjà entendu parler. Mais il y a un petit soucis logique pour en parler à ce stade. Il faut au préalable démontrer un théorème nous assurant que l'expression $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ que l'on peut donner d'une fonction polynomiale f est unique, sans quoi on ne pourrait parler *du* coefficient de f d'un certain degré, ni même *du* degré de f. Par exemple, si l'assertion suivante (qui est fausse) était vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 1 = 8x + 1$$

alors le polynôme $x \mapsto 3x^2 + 1 = 8x + 1$ serait-il dit de degré 1 ou 2?

2. Théorème d'identification des coefficients

On va démontrer l'unicité de "l'expression polynomiale" d'une fonction polynomiale. Commençons par le polynôme nul.

Proposition 5. *Soit* $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *une fonction polynomiale. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) f *est le polynôme nul, ie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

(ii) $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$

Démonstration. À noter. $\square$

Théorème 6. (Théorème d'identification des coefficients.) *Soient* n, m *des entiers tels que* $m \geq n$, *et* $a_0, a_1, \ldots a_n$ *et* $b_0, b_1, \ldots, b_m$ *des réels. Il est équivalent de dire :*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, *et*

(ii) $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = b_k$ *et* $\forall k \in [\![n+1, m]\!], b_k = 0$

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. La contrainte "$m \geq n$" n'en est pas une, quitte à échanger les rôles des a_k et des b_k. De plus, si $m = n$, la proposition "$\forall k \in [\![n+1, m]\!], b_k = 0$" est vide de contrainte (car $[\![, n+1, m]\!] = \emptyset$) donc considérée comme vraie.

Exemple 7. Existe-t-il des réels a et b vérifiant la proposition suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, (a+b)x^2 + (a-b)x + 2a = x + 1$$

Théorème 8. (Théorème d'unicité des coefficients.) *Soit* f *une fonction polynomiale non nulle. Alors, il existe un unique entier* n *et d'uniques réels* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tels que* $a_n \neq 0$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Autrement dit, il existe une unique écriture de f *sous la forme* $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *telle que* $a_n \neq 0$.

Démonstration. À noter. $\square$

3. Premières généralités sur les polynômes

On peut enfin parler convenablement des polynômes.

Définition 9. Soit P un polynôme non nul, et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ l'unique expression polynomiale de P telle que $a_n \neq 0$ (où $n \in \mathbb{N}$), bien définie d'après le théorème d'unicité des coefficients.

(*i*) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on dit que a_k est le *coefficient de degré k* de P.

(*ii*) L'entier n est appelé le *degré* de P, noté $\deg(P)$. On pose également $\deg(0_{\mathbb{R}[X]}) = -\infty$.

(*iii*) Les monômes $a_k X^k$ sont appelés les *termes* de P.

(*iv*) On dit que $a_n X^n$ est le *terme de plus haut degré* de P. a_n est appelé le *coefficient dominant* de P. a_0 est appelé le *coefficient constant* de P.

(*v*) Si $a_n = 1$, on dit que P est *unitaire*.

Remarque. Notation : On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré *au plus* n, pour tout entier n. Par exemple, $X^3 + 1 \in \mathbb{R}_4[X]$, $X^5 - 1 \notin \mathbb{R}_4[X]$ et $X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$.

Remarque. Attention, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme, alors P n'est pas nécessairement de degré n et de coefficient dominant a_n. Il faut pour cela que $a_n \neq 0$.

Par exemple, $0X^5 + 3X + 1$ est de degré 1, de coefficient dominant 3.

Remarque. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme, tel que $a_n \neq 0$. P est donc de degré n. Mais on peut écrire, pour $m > n$ entier :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k = a_m x^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0.$$

à condition de poser $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_m = 0$. Ainsi, pour tout $k > n$, on dit que le coefficient de degré k de P est nul (ici, $a_k = 0$ pour $k > n$).

Exemple 10. Considérons le polynôme $P(X) = 8X^2 + 4X^3 + 1$. Pour rendre cette expression plus lisible, on écrit :

$$P(X) = 4X^3 + 8X^2 + 1.$$

P est donc de degré 3, de coefficient dominant 4, de coefficient constant 1. Son coefficient de degré 1 est nul.

Définition 11. Soit P un polynôme, et $r \in \mathbb{R}$. On dit que r est *une racine réelle* (ou racine) de P si $P(r) = 0$.

Exemple 12. Soit $f(X) = 2X^2 - 1$. Alors, $f(1) = 1$ donc 1 n'est pas racine de f, et $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est (une) racine de f.

Remarque. La notion de "racine" est réservée aux polynômes.

Les fonctions polynomiales sont, comme on l'a déjà vu, dérivables. On remarque que la dérivée d'un polynôme est à nouveau un polynôme.

Proposition 13. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si de plus $a_0, \dots a_n$ sont des réels (pour un certain $n \in \mathbb{N}$) vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

alors f' est le polynôme donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \text{ si } n \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. Sera démontrée dans le chapitre sur la dérivabilité. □

Remarque. Ainsi, tout polynôme est dérivable, et la dérivée d'un polynôme est un polynôme. On en déduit, par une récurrence immédiate, que les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables. De plus, si $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, alors la dérivée d-ième de f est :

$$f^{(d)} = \sum_{k=d}^{n} k(k-1)\dots(k-d+1) a_k X^{k-d}$$

si d est un entier inférieur à n, et $f^{(d)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ si $d > n$.

II. Fonctions affines, trinômes du second degré

1. Fonction affine

Définition 14. On appelle fonction affine toute fonction polynomiale de degré au plus 1. Ainsi, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction affine ssi il existe deux réels a et b tels que :

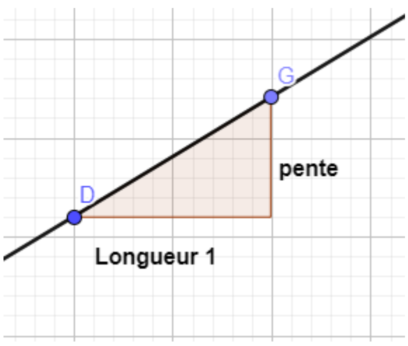
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

On dit que a est le coefficient directeur de f, et b est son ordonnée à l'origine.

Remarque. Avec ces notations, $f(0) = b$ donc b est bien l'ordonnée du point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f, d'où la terminologie.

Remarque. On peut démontrer qu'une fonction est une fonction affine si et seulement si sa courbe représentative est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. Pour cette raison, on dit aussi que a est la pente de de la courbe représentative de la fonction polynomiale $f(X) = aX + b$.

Remarque. Plus sur la pente d'une droite.



La pente d'une droite, représentée ci-contre, est par définition la variation d'ordonnée correspondant à une variation de 1 en abscisse. Si cette droite est la courbe de $f(X) = aX + b$, alors les points D et G représentés ont des cordonnées de la forme $D = (x_D, f(x_D))$ et $G = (x_D + 1, f(x_D + 1))$. La pente de cette droite est donc :

$$f(x_D+1) - f(x_D) = a(x_D+1) + b - (ax_D + b) = a.$$

Proposition 15. *Soit $f(X) = aX + b$ une fonction affine. Alors :*

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante.

(ii) Si $a = 0$, alors f est constante.

(iii) Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration. La dérivée de f est le polynôme $f'(X) = a$. On conclut par le théorème liant la monotonie de f au signe de sa dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}$. $\square$

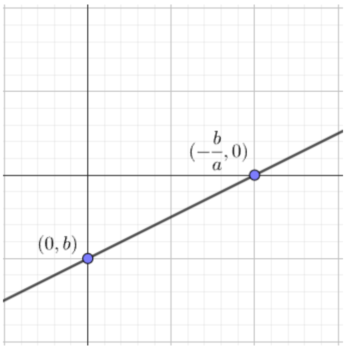
Remarque. Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors, pour tout réel x :

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}.$$

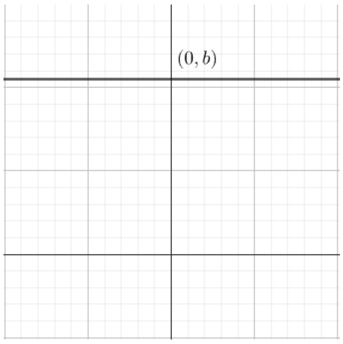
Cela donne l'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe représentative d'une fonction affine non constante.

Remarque. Les courbes représentatives des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont résumées ci-dessous.

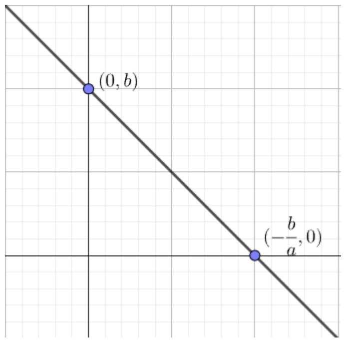
Cas $a > 0$



Cas $a = 0$



Cas $a < 0$



2. Polynômes du second degré

Pour les polynômes du second degré, il y a plus de choses à dire. Tout d'abord :

Remarque. Soient a, b, c des réels. Dire que le polynôme $f(X) = aX^2 + bX + c$ est un polynôme du second degré est équivalent à dire $a \neq 0$.

Définition 16. Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Alors, on dit que $aX^2 + bX + c$ est la *forme développée* de f.

a) Forme canonique

Proposition 17. (Et définition.) *Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Alors, il existe d'uniques réels α et β tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

L'écriture $f(X) = a(X - \alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique de f.

Démonstration. À noter. $\square$

Remarque. Dans cette démonstration, on a démontré que la forme canonique d'un polynôme du second degré $f(X) = aX^2 + bX + c$ est

$$f(X) = a(X - \alpha)^2 + \beta$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Remarque. En plus de mettre en évidence les racines d'un polynôme du second degré, la forme canonique met en évidence ses variations, comme on va le voir dans les sous parties suivantes.

b) Discriminant et racines

La forme canonique met en évidence la proposition suivante.

Proposition 18. (Et définition.) *Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Il est équivalent de dire :*

(i) $b^2 - 4ac \geq 0$

(ii) f admet une racine réelle.

Le réel $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant *de f.*

Démonstration. À noter. □

Allons un peu plus loin.

Proposition 19. (Et définition) *Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Supposons le discriminant Δ de f positif.*
Posons $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

On dit que $f(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$ est la forme factorisée de f.

Démonstration. À noter. □

Remarque. La forme factorisée d'un polynôme du second degré de discriminant strictement négatif est, par définition, sa forme développée.

Proposition 20. *Soit $f(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f. Alors :*

(i) Si $\Delta > 0$, f admet exactement deux racines x_1 et x_2 données par:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors f admet pour unique racine $-\dfrac{b}{2a}$.

Démonstration. À noter □

Remarque. Cela démontre au passage l'unicité d'une forme factorisée d'un polynôme du second degré f. Si $f(X) = k(X - u)(X - v)$ pour des réels k, u et v, alors u et v sont exactement les racines de f, et k est le coefficient dominant de f (en exercice facultatif).

Remarque. Par factorisation : $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 - x = x(3x-1) = 3x(x - \frac{1}{3})$. On a donc l'égalité polynomiale :

$$3X^2 - X = 3(X - 0)(X - \frac{1}{3})$$

donc la forme factorisée de $3X^2 - X$ est $3X(X - \frac{1}{3})$ et ses racines sont 0 et $\frac{1}{3}$.

De même, $X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$ donne la forme factorisée de $X^2 + 4X + 4$, et son unique racine est -2.

On pourra, dans le cas d'une factorisation évidente, éviter d'utiliser le discriminant.

Enfin, la forme factorisée d'un polynôme du second degré nous permet de voir ce qu'on appelle les relations coefficients-racines.

Proposition 21. *Soit f un polynôme du second degré de discriminant positif. Notons $f(X) = aX^2 + bX + c$ sa forme développée et x_1, x_2 ses racines (avec éventuellement $x_1 = x_2$ si $\Delta = 0$). Alors :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 22. (cas d'une racine évidente) Considérons le polynôme $P(X) = 2X^2 + X - 1$. On remarque que -1 est racine de P. D'après les relations coefficients-racines ci-dessus, l'autre racine x_2 de P vérifie $(-1)x_2 = \frac{-1}{2}$ donc la 2e racine de P est $\frac{1}{2}$. La forme factorisée de P est donc :

$$P(X) = 2(X+1)(X - \frac{1}{2}).$$

Exercice 23. Factoriser les polynômes suivants :

(i) $6X^2 - 3X$

(ii) $2X^2 - X - 1$

(iii) $X^2 - X + 1$

(iv) $-X^2 - X + 6$

c) Variations et signe d'un polynôme du second degré

Proposition 24. *Soit f un polynôme du second degré, de forme canonique $f(X) = a(X-\alpha)^2 + \beta$.*

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

(ii) Si $a < 0$, alors f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

De plus, f admet un extremum en α valant β.

Démonstration. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ donc en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2a(x-\alpha).$$

Le tableau de signe de f' est alors évident en fonction du signe de a, on en déduit de suite les variations de f. □

Proposition 25. *Soit f un polynôme du second degré. Notons Δ son discriminant et a son coefficient dominant.*

(i) Si $\Delta < 0$, alors f est de signe (stricte) constant sur $\mathbb{R}$, du signe de a.

(ii) Si $\Delta = 0$, soit x_0 l'unique racine de f. Alors, le tableau de signe de f est donné, selon le signe de a, par :

Cas $a > 0$

x	-∞		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Cas $a < 0$

x	-∞		x_0		$+\infty$
$f(x)$		-	0	-	

(iii) Si $\Delta > 0$, soient x_1 et x_2 les deux racines de f, telles que $x_1 < x_2$. Alors, le tableau de signe de f est donné, selon le signe de a, par :

Cas $a > 0$

x	-∞		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

Cas $a < 0$

x	-∞		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	$+$	0	-	

Démonstration. À noter. □

d) Bilan : tracé des graphes des polynômes du second degré

Nous allons représenter l'allure du graphe d'un polynôme du second degré f. Notons pour cela :

(i) sa forme développée $f(X) = aX^2 + bX + c$

(ii) sa forme canonique $f(X) = a(X - \alpha)^2 + \beta$

(iii) son discriminant Δ

(iv) sa forme factorisée $f(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$ si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$, ou $f(X) = a(X - x_0)^2$ si $\Delta = 0$.

Représentations graphiques à noter, en fonction des signes de Δ et de a.

III. Arithmétique des polynômes

1. Remarque sur les polynômes et les opérations

Soient P et Q deux polynômes et λ un réel.

On remarque immédiatement que les fonctions $P+Q$, PQ et $\lambda \cdot P$ sont également des polynômes. On dit que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes est stable par somme, produit, et multiplication scalaire.

Plus précisément, si P et Q sont donnés par

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

alors :

(i)

$$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$$

où l'on a complété les coefficients non définis par 0 (par exemple, si on a $m > n$, on pose $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_m = 0$ dans cette formule).

Par exemple, si $P(X) = 2X^2 + 5X + 1$ et $Q(X) = 4X^3 + 8X + 7$, alors :

$$(P+Q)(X) = (0+4)X^3 + (2+0)X^2 + (5+8)X + (1+7) = 4X^3 + 2X^2 + 13X + 8.$$

Il s'agit de simples factorisation par les puissances de X:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (P+Q)(x) &= 0x^3 + 2x^2 + 5x + 1 + 4x^3 + 0x^2 + 8x + 7 \\ &= (0+4)x^3 + (2+0)x^2 + (5+8)x + (1+7).\end{aligned}$$

(ii)

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$$

où l'on a complété les coefficients non définis par 0.

Cette formule plus difficile n'est que la généralisation d'un calcul simple que vous savez effectuer (développer le produit, factoriser par les puissances de X).

Par exemple, si $P(X) = 2X^2 + 5X + 1$ et $Q(X) = 4X^3 + 8X + 7$, alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (PQ)(x) &= P(x)Q(x) \\ &= (2x^2 + 5x + 1)(4x^3 + 0x^2 + 8x + 7) \\ &= 2 \times 4x^{2+3} + 2 \times 0x^{2+2} + 5 \times 4x^{1+3} + 2 \times 8x^{2+1} + 5 \times 0x^{1+2} + 1 \times 4x^{0+3} \\ &+ 2 \times 7x^{2+0} + 5 \times 8x^{1+1} + 1 \times 0x^{0+2} + 5 \times 7x^{1+0} + 1 \times 8x^{0+1} + 1 \times 7\end{aligned}$$

puis en factorisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (PQ)(x) = (2\times4)x^5 + (2\times0+5\times4)x^4 + (2\times8+5\times0+1\times4)x^3 + (2\times7+5\times8+1\times0)x^2 + (5\times7+1\times8)x + 1\times7,$$

ce que résume la formule précédente (en ajoutant des termes nuls afin d'avoir une formule valable en toute généralité).

(iii) De même, $(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$.

On en déduit assez simplement les propositions suivantes :

Proposition 26. *Soient P et Q deux polynômes non nuls, de termes de plus haut degré respectifs a_nX^n et b_mX^m.*

(i) Si $n \neq m$, le terme de plus haut degré de $P+Q$ est :
- a_nX^n *si* $n > m$
- b_mX^m *si* $m > n$

(ii) Si $n = m$, le coefficient de degré $n = m$ de $P+Q$ est $a_n + b_n$, mais on ne peut conclure sur le terme de plus haut degré de $P+Q$.

Exemple 27. Si $P(X) = 13X^2 + 1$ et $Q(X) = 2X + 1$, alors le terme de plus haut degré de $P+Q$ est $13X^2$.

Mais si $P(X) = 5X^3 - X^2 + 2X + 1$ et $Q(X) = -5X^3 + X^2 - 1$, alors

$$(P+Q)(X) = 2X.$$

Proposition 28. *Soient P et Q deux polynômes non nuls, de termes de plus haut degré respectifs a_nX^n et b_mX^m, de coefficients constants respectifs a_0 et b_0. Alors:*

(i) le terme de plus haut degré de PQ est $a_nb_mX^{n+m}$.

(ii) le coefficient constant de PQ est a_0b_0.

Une conséquence de tout cela :

Proposition 29. *Soient P et Q deux polynômes. Il est équivalent de dire :*

(i) $PQ = 0_{\mathbb{R}[X]}$

(ii) $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ *ou* $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Démonstration. À noter. □

Exemple 30. Si $P(X) = 13X^2 + 1$ et $Q(X) = 2X + 1$, alors le terme de plus haut degré de PQ est $13 \times 2X^3$ et son coefficient constant est 1×1.

2. Opérations et degré

Proposition 31. *Soient P et Q deux polynômes. Alors:*

(i) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

(ii) Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$*, alors* $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

avec les conventions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \max(n, -\infty) = n$$

$$\max(-\infty, -\infty) = -\infty$$

Démonstration. À noter. □

Proposition 32. *Soient P et Q deux polynômes. Alors :*

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

avec les conventions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Démonstration. À noter □

Proposition 33. *Soit P un polynôme et λ un réel. Alors :*

(i) Si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.

(ii) Si $\lambda = 0$, alors $\lambda P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\deg(\lambda P) = -\infty$.

Démonstration. À noter. $\square$

Proposition 34. *Soit P un polynôme. Alors,*
(i) Si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
(ii) Sinon, P est constant. Alors $P' = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $\deg(P') = -\infty$.

Démonstration. À noter. $\square$

Exemple 35. Montrons que l'unique polynôme P tel que

$$P(X) - 2P'(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

est le polynôme nul.

Parfois, ces considérations sur le degré ne suffisent pas. Dans ce cas, il est souvent judicieux de considérer le coefficient dominant des polynômes en jeux pour conclure, comme dans la preuve de toutes ces propositions.

Exercice 36. Montrer que l'unique polynôme P tel que

$$P(X) + 2XP'(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

est le polynôme nul. *On pourra, pour P non nul, considérer le coefficient dominant de P et en déduire le coefficient dominant de $P(X) + 2XP'(X)$.*

3. Le théorème de la division euclidienne

a) Rappel sur la division euclidienne des entiers

Théorème 37. (de la division euclidienne.) *Soient a et b des entiers relatifs, tels que $b \neq 0$. Alors, il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tels que :*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r \leq |b| - 1 \end{cases}.$$

On dit que q est le quotient de la division euclidienne de a par b, et que r est son reste. On dit que $a = bq + r$ est l'égalité de la division euclidienne de a par b.

Exemple 38. Posons la division euclidienne de 239 par 13.

b) Division euclidienne de polynômes

Ce théorème est admis, mais vous devez assimiler la pratique qui lui est associée : la division euclidienne de polynômes.

Théorème 39. (de la division euclidienne pour les polynômes.)
Soient A et B deux polynômes, tels que $B \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, il existe d'uniques polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) \leq \deg(B) - 1 \end{cases}.$$

On dit que Q est le quotient de la division euclidienne de A par B, et que R est son reste. L'égalité $A = BQ + R$ est appelée l'égalité de la division euclidienne de A par B.

En pratique, vous devez apprendre à poser une division euclidienne entre polynômes.

Exemple 40. (et explications) : À noter.

c) Polynômes et divisibilité

Définition 41. Soient A et B deux polynômes. On dit que A *divise* B, et on note $A|B$ si :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], B = AQ$$

.

Exemple 42. $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ donc $X+1|X^2-1$ et $X-1|X^2-1$.

Exemple 43. Par définition, pour tout polynôme P :

(i) $0_{\mathbb{R}[X]}|P$ si et seulement si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

(ii) $P|0_{\mathbb{R}[X]}$ est vrai, car $0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]}P$.

Proposition 44. *Soient A et B deux polynômes, avec B non nul. Il est équivalent de dire :*
(i) $B|A$, et
(ii) le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

Démonstration. À noter. □

Ainsi, étant donné deux polynômes A et B, pour savoir si $B|A$:

(i) Si A ou B est nul, on est dans un cas trivial et on se réfère à l'exemple 43 ci-dessus.

(ii) Sinon, on peut poser la division euclidienne de A par B et conclure, en fonction du reste obtenu.

4. Racines et factorisation

Il y a deux problématiques entremêlées dans l'étude d'un polynôme : la détermination de ses racines, et la détermination d'une factorisation de ce polynôme.

Proposition 45. *Soit P un polynôme et r un réel. Il est équivalent de dire :*
(i) r est racine de P,
(ii) $(X-r)|P$, autrement dit : il existe un polynôme Q tel que $P = (X-r)Q$.

Démonstration. { A noter. □

Voici pour vous l'intérêt majeur de cette proposition.

Exemple 46. Soit $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

(i) Déterminer à vue une racine r de P (chercher une racine facile : -1, 0 ou 1 par exemple).

(ii) En déduire une première factorisation de P de la forme $P = (X-r)Q$ (poser la division euclidienne de P par $X-r$).

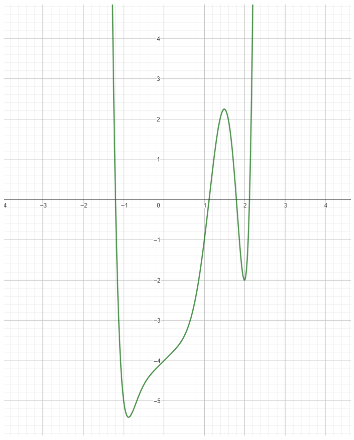
(iii) Factoriser P au maximum (factoriser Q, qui est de degré 2, puis écrire la formule obtenue pour P).

Exercice 47. En suivant les mêmes étapes, factoriser $X^3 - 4X^2 + X + 6$.

5. Factorisation, racines distinctes et degré

Voici le clou du spectacle, le dernier théorème de cette partie étant fondamental. Il justifie qu'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines. Autrement dit, une courbe donnée par une équation polynomiale de degré n croise au plus n fois l'axe des abscisses.

Cette courbe ne peut pas représenter un polynôme de degré inférieur à 3.



(C'est la courbe représentative d'un polynôme de degré 8.)

Proposition 48. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a_1, \dots, a_p$ des réels deux à deux distincts. Alors, il est équivalent de dire :*

(i) $a_1, \dots a_n$ sont des racines de P, et

(ii) $(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_p) | P$, autrement dit :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], P = \left(\prod_{k=1}^{p} (X - a_k)\right) Q.$$

Démonstration. À noter. □

Exemple 49. Considérons le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 1$. Factorisons P.
On remarque que -1 et 1 sont racines de P.
D'après cette proposition, $(X - 1)(X + 1)|P$ donc $(X^2 - 1)|P$.
Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X^2 - 1)Q$.
On pose la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ pour déterminer un tel polynôme Q.
On remarque que Q est de degré 2, on peut donc factoriser Q pour terminer la factorisation de P, et avoir ainsi ses racines.

Un premier corollaire :

Proposition 50. *Soit P un polynôme de degré n. Supposons donné n racines distinctes $a_1, \dots a_n$ de P. Alors :*

$$P = a(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$$

où a est le coefficient dominant de P.

Démonstration. À noter. □

Et le théorème mentionné en début de partie :

Théorème 51. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme de degré au plus n. si P admet $n + 1$ racines (distinctes), alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.*
Autrement dit, tout polynôme de degré n (donc non nul) admet au plus n racines (distinctes).

Démonstration. À noter. □

Une conséquence importante (HP mais classique : raisonnement à savoir reproduire).

Proposition 52. *Soient P et Q deux polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. Si P et Q sont égaux en $n + 1$ points distincts, alors P et Q sont égaux.*