

Devoir surveillé n°1

Devoir du **samedi 3 octobre 2026**.

L'usage de documents de cours et d'appareils électroniques est interdit.

Consignes de présentation : Écrire avec une encre bleue sombre ou noire. Encadrer les résultats. Ne pas utiliser la couleur rouge. Écrire de façon lisible. Éviter les ratures. **Utiliser une règle.**

Consignes de rédaction : Rédiger les raisonnements en français, dans une langue correcte et soignée, sans utiliser d'abréviation.

On rappelle que le connecteur $\implies$ ne peut pas être utilisé comme synonyme de "donc".

Exercice 1 *Quelques questions indépendantes, proches du cours*

- (a) Nier la proposition $P : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, z > y \implies e^z > x$.
(b) La proposition P est-elle vraie ?
- Montrer que $n(3n+1)$ est pair pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- Démontrer : $\forall x > -1, x \geq \ln(1+x)$.
- Définir précisément la notion de fonction paire. En donner un exemple.
- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Montrer que $f \times g$ est monotone lorsque que f est croissante et négative sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante et positive sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x , définir précisément $\lfloor x \rfloor$. Donner une représentation du graphe de $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ dans un repère orthonormé.
- Résoudre l'inéquation $-\frac{3}{2} \leq \lfloor x \rfloor < \pi$, d'inconnue réelle x .
- Comparer les réels $\sqrt{10} - 2$ et $\sqrt{3}$.
- Soient n un entier et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Montrer :

$$a_1 + \dots + a_n \geq 1 \implies \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k \geq \frac{1}{n}.$$

- Écrire un code Python permettant de calculer $\prod_{k=1}^{2026} (1 + k + k^2)$.
- Résoudre l'équation $x^4 + 2 = 0$, d'inconnue réelle x .
- Résoudre l'inéquation $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) < 0$, d'inconnue réelle x .
- Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 1 = 0$, d'inconnue réelle x .
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+1} - t + 1}$.
- Résoudre l'inéquation $|x^2 - 2x + 2| < 3$, d'inconnue réelle x .
- Déterminer l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée de la fonction $f : t \mapsto (1+t)^{\ln(t)}$.

Exercice 2 Quelques résultats sur la divisibilité

Définition 1. Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a divise b s'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$. Dans ce cas, on note $a|b$.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. Démontrer les propositions suivantes :

A : $a|a$

B : $(a|b \text{ et } b|c) \implies a|c$

C : $(a|b \text{ et } a|c) \implies \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, a|(nb + mc)$

D : $(a|b \text{ et } c|d) \implies ac|bd$

Exercice 3 Autour de la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Quelques résultats élémentaires.

(a) Calculer F_n pour $n \in \llbracket 2, 8 \rrbracket$.

(b) Montrer par récurrence double que $F_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer par récurrence que $F_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 2, c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 2, \quad F_{n+1} > F_n$$

2. Calculer $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ pour quelques valeurs de n . Conjecturer une expression simple en fonction de n . Démontrer cette conjecture.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$$

Exercice 4 Comparaison de a^b et b^a

Soient a et b deux réels strictement positifs. On suppose $a \leq b$.

1. Justifier que comparer a^b et b^a revient à comparer $b \ln(a)$ et $a \ln(b)$.

2. Justifier que : $a \ln(b) - b \ln(a) = ab \left(\frac{\ln(b)}{b} - \frac{\ln(a)}{a} \right)$.

3. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur son domaine de définition.

(b) On admet les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

4. En déduire une comparaison de a^b et b^a si $0 < a \leq b \leq e$ et une comparaison de a^b et b^a si $e \leq a \leq b$.

5. Application : comparer π^e et e^π .

Exercice 5 Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f , définies sur $\mathbb{Q}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Analyse.** Supposons que f vérifie : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
 - Déterminer $f(0)$.
 - Démontrer : $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$.
 - Montrer : $\forall m \in \mathbb{Z}, \quad f(m) = mf(1)$.
 - Notons $a = f(1)$. Démontrer enfin que pour tout $x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.
- Synthèse.** Vérifier que les fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$ sont des solutions du problème.
- Conclure.

Exercice 6 Un petit exercice plus théorique.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

- Montrer que f ne s'annule pas, et que $f(1) \in \{-1, 1\}$.
- Dans cette question seulement, on suppose f strictement croissante et de signe constant sur $[1, +\infty[$. Montrer que f est strictement croissante sur $]0, 1]$, et de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Dans cette question seulement, on suppose f de signe constant. On suppose en outre $f(1) = -1$, et f minorée par un réel A . Montrer que $\frac{1}{A}$ est un majorant de f .
- Existe-t-il une fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x)h\left(\frac{1}{x}\right) = -1$?

Exercice 7 Étude d'une fonction

Soit f la fonction de la variable réelle x donnée par l'expression $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ puis donner une expression de f' .
- Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on pose $u(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Justifier que la fonction u est bien définie et que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

- Étudier le signe de u .

Indication : on pourra étudier les variations de cette fonction u et présenter les résultats dans un tableau de variations en admettant les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$$

- Dresser le tableau de variations de f et dessiner la courbe représentative de f .
On admettra les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

— Fin de l'énoncé —